

JACIR J. VENTURI

cônicas e quádricas

6.^a edição
(atualizada)

*Na internet você encontra integralmente
os três livros do autor:*

1) *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica*

2) *Cônicas e Quádricas*

3) *Da Sabedoria Clássica à Popular*

Site: **www.geometriaanalitica.com.br**
com acesso gratuito.

© Copyright by Jacir J. Venturi

FICHA CATALOGRÁFICA

VENTURI, Jacir J., 1949 -
Cônicas e Quádricas / Jacir J. Venturi
- 6.^a ed. - Curitiba
243 p.: il.
Inclui Apêndice e Bibliografia.
ISBN 978-65-901642-0-9

1. Geometria Analítica.

2. Cônicas e Quádricas.

I. Título.

CDD 516.3

V 469c 2019

ISBN 978-65-901642-0-9

Desenhos:

Jacir J. Venturi

Capa/Correções:

Jeanfrank Sartori

Edição:

Livrarias Curitiba

Dedico aos meus familiares e amigos: companheiros de jornada e razão maior do meu afeto e crescimento pessoal.

Dedico também às pessoas que vão além do seu dever.

Índice

CAPÍTULO 1

TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS NO E^2

01. Translação de eixos	23
02. Rotação de eixos	25
03. Aplicação das translações e rotações no estudo de uma equação do 2.º grau	28

CAPÍTULO 2

A PARÁBOLA

01. Definição	41
02. Elementos da parábola	42
03. Equações canônicas da parábola	42
04. Identificação da parábola	44
05. Construção geométrica da parábola	45
06. Aplicações práticas de parábola	46
07. Equações da parábola de $V \equiv O' = (x_o, y_o)$	50
08. Equação da parábola de $V \equiv O' = (x_o, y_o)$ e cujo eixo de simetria não é paralelo a um dos eixos coordenados	63

CAPÍTULO 3

A ELIPSE

01. Definição	69
02. Elementos da elipse	69
03. Excentricidade	70
04. Equação canônica da elipse de centro na origem	71
05. Identificação da elipse	73
06. Construção de uma elipse	75
07. Aplicações práticas da elipse	75
08. Equação da elipse cujo centro é $O' = (x_o, y_o)$ e cujos eixos são paralelos aos eixos coordenados	82
09. Equação da elipse cujo centro é $O' = (x_o, y_o)$ e cujos eixos não são paralelos aos eixos coordenados	87

CAPÍTULO 4 A HIPÉRBOLE

01. Definição	92
02. Elementos da hipérbole	92
03. Excentricidade da hipérbole	93
04. Equação canônica da hipérbole de centro na origem	93
05. Assíntotas da hipérbole	98
06. Hipérbole equilátera	100
07. Identificação da hipérbole	100
08. Aplicações práticas de uma hipérbole	101
09. Equação da hipérbole cujo centro é $O' = (x_0, y_0)$ e cujos eixos são paralelos aos eixos coordenados	106
10. Equação da hipérbole cujo centro é $O' = (x_0, y_0)$ e cujos eixos não são paralelos aos eixos coordenados	111

CAPÍTULO 5 CÔNICAS

01. Seções cônicas	119
02. Equação completa do 2.º grau	120
03. Discriminante da equação do 2.º grau	120
04. Ordem das transformações	120
05. Revisando	121
06. Cônicas degeneradas	135

CAPÍTULO 6 EQUAÇÃO DA TANGENTE A UMA CÔNICA

1.º Problema: A tangente é paralela a uma reta dada	145
2.º Problema: Equação da tangente por um ponto externo à parábola	150
3.º Problema: Equação da tangente em um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ pertencente à parábola	153

QUADRO RESUMO	160
---------------------	-----

CAPÍTULO 7 QUÁDRICAS

Resenha histórica	161
-------------------------	-----

CAPÍTULO 8 QUÁDRICAS

01. Definição	164
02. Exemplo de Quádricas	164
03. Revisando	165
04. Superfícies	166
05. Simetria	167
06. Equações de curvas no E^3	169
07. Interseções da superfície com os eixos coordenados	173
08. Interseção da superfície com planos	174

CAPÍTULO 9 SUPERFÍCIE ESFÉRICA

01. Introdução	183
02. Definição	183
03. Cálculo do centro e do raio	184
04. Casos Particulares	184

CAPÍTULO 10 SUPERFÍCIE CILÍNDRICA

01. Definição	198
02. Equação da superfície cilíndrica	198
03. Superfície cilíndrica de geratrizes paralelas aos eixos cartesianos	207

CAPÍTULO 11 SUPERFÍCIE CÔNICA

01. Definição	218
02. Equação da superfície cônica	218
03. Reconhecimento da superfície cônica e cálculo do vértice	225

APÊNDICE	230
-----------------------	-----

Prefácio

Conta uma fábula grega que os deuses do Olimpo estavam preocupados com a evolução do homem. Este estava se desenvolvendo tanto pelo uso de sua inteligência que em breve alcançaria os imortais deuses.

Era preciso agir. O tonitroante e todo-poderoso Zeus, senhor dos deuses e do mundo, vociferou: "Vamos esconder do homem o seu talento, e ele jamais nos alcançará".

Mas onde esconder o talento do homem? Poseidon, deus dos mares, sugeriu as profundezas dos oceanos. Apolo, deus da luz, no topo da montanha. Deméter, deusa da terra, em vales recônditos, Hefesto, deus do fogo, em magmas vulcânicas. Ares, deus da guerra, nas geleiras eternas.

Impávido, Zeus declara: "Nada disso, o melhor esconderijo do homem é o interior do próprio homem. Ele jamais há de procurar o que está dentro de si".

Esta fábula não só enaltece a busca do autoconhecimento e do desenvolvimento das próprias potencialidades, mas também retrata a saga intelectual do povo grego. Mesmo aos neófitos, a cultura helenística enseja um extraordinário fascínio.

A investigação sistemática, racional e criativa norteia suas atividades na Matemática (Hipócrates, Anaxágoras, Zenão, Demócrito, Hípias, Tales, Hipasus, Pitágoras, Euclides, Arquimedes, Apolônio, Eudoxo, Aristarco, Eratóstenes, Ptolomeu, Hiparco, Diofanto, Pappus); na Filosofia (Sócrates, Platão, Aristóteles, Anaxímenes, Anaximandro, Protágoras, Zenão, Epicuro); na História (Heródoto, Xenofonte, Tucídides); na Poesia (Homero, Píndaro, Hesíodo, Safo); no Teatro (Ésquilo, Sófocles, Aristófanes, Eurípides); nas Artes (Fídias, Míron, Ictínio, Calícrates); na Medicina (Hipócrates, Empédocles, Alcmeón).

Aos gregos (por nascimento e/ou formação) Pitágoras, Euclides, Arquimedes e Apolônio deve-se praticamente todo o desenvolvimento geométrico das Cônicas. E muito mais, ensinaram a transição da fase intuitiva e empírica da Matemática dos antigos egípcios e babilônios para a fase de axiomatização da Matemática. Mormente, da Geometria, "um mundo de infinita harmonia", conforme assevera o renomado escritor argentino Ernesto Sabato.

No volume anterior, *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica* (10.^a edição), tratamos de equações lineares, isto é, equações que só possuíam termos do 1.^o grau em x , y e z . No presente (e despre-

tensioso) livro-texto, tratar-se-á de equações do 2.º grau, no plano cartesiano. Em especial, a parábola, a elipse, a hipérbole e a circunferência. São curvas obtidas pela interseção de um plano com um cone circular de 2 folhas. Por isso, são chamadas de seções cônicas ou simplesmente **cônicas**.

Tratar-se-á também de superfície quádricas, que ganham uma importância cada vez maior na área computacional (Fractais, por exemplo).

Uma **quádrica** é o conjunto de pontos E^3 , cujas coordenadas cartesianas, verificam uma equação do 2.º grau a, no máximo, três variáveis. Esferas, parabolóides, elipsóides, hiperbolóides, cilindros (do 2.º grau) e cones (do 2.º grau) constituem as mais conhecidas superfícies quádricas.

Um grande número de ilustrações facilita o entendimento do texto e é imprescindível quando se almeja uma conspícua formação geométrica. Há indicações de aplicabilidade prática, sinopses históricas e sugestões para a resolução de exercícios, no intuito de motivar o aluno naquilo que está estudando. Com o escopo didático, os exercícios estão dispostos em ordem crescente de dificuldade.

Deve-se ter em mente que à resolução dos exercícios precede necessariamente um bom conhecimento da teoria. Por vezes, preferiu-se a apresentação intuitiva aos refinamentos teóricos, que viessem obstaculizar a compreensão do novel universitário.

Honraram-nos sobremaneira a análise criteriosa e as sugestões feitas pelo Prof. Leo Barsotti (in memoriam) nos manuscritos que antecederam este manual e de quem fomos assistentes por 3 lustros. Nesta convivência, aprendemos a admirá-lo não apenas como profissional exigente e de extraordinário conteúdo mas também como exemplo de coerência e justiça.

Ademais, cumprimos o elementar dever de gratidão pelo desprendimento com que os professores Florinda Miyaóka, Osny A. Dacol, Décio Krause, Ana Maria N. de Oliveira, Luiz Carlos Domênico e Adilson Longen se dispuseram a ler o manuscrito e apresentar sugestões. O mesmo preito de gratidão estendemos à plêiade de colegas e amigos do Depto. de Matemática da UFPR, que nos propiciaram uma convivência de crescimento pessoal e profissional.

Também a nossa profunda e sincera gratidão aos abnegados professores Pe. Oneres Marchiori e Pe. Andreás Wiggers pelos ensinamentos de Matemática, Latim e Grego no Ensino Fundamental e Médio em Lages(SC) e antes de tudo exemplos de altruísmo e dedicação.

Críticas e sugestões hão de surgir. E serão bem-vindas. Resta-nos o consolo de ter envidado esforços para empregar utilmente o nosso tempo.

Cônicas:

Resenha Histórica

INTRODUÇÃO

"Na maior parte das ciências, assevera Herman Hankel, uma geração põe abaixo o que a outra construiu, e o que uma estabeleceu a outra desfaz. Somente na Matemática é que uma geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura." Como na formação de uma estrutura geológica, as descobertas matemáticas se sedimentam e se estratificam ao longo dos séculos. Entretanto não se infira que a Matemática é uma ciência estática e sim em contínua evolução. As formulações inicialmente tênues e difusas percorrem um espinhoso caminho até atingir a magnitude de seu desenvolvimento.

No presente epítome histórico, vamo-nos ater ao período considerado por muitos historiadores como a fase áurea da Matemática da antiguidade. Esse período se inicia com a Escola Pitagórica (séc. VI a.C.), tem sequência com Euclides e Arquimedes e termina com Apolônio (séc. II a.C.).

Este apanágio, por si só, não justificaria esta resenha histórica no presente livro-texto que trata das Cônicas. No entanto, é justamente nesse período que se dá praticamente todo o desenvolvimento geométrico das cônicas. Porém, o enfoque analítico das cônicas só acontece com Fermat (1601-1665), uma vez que os matemáticos gregos não possuíam uma notação algébrica adequada.

Credita-se a Fermat:

- o estabelecimento do princípio fundamental de que uma equação do 1.º grau, no plano, representa uma reta e que uma equação do 2.º grau, no plano, representa uma cônica;

- a determinação das equações mais simples da reta, da circunferência, da elipse, da parábola e da hipérbole;

- a aplicação da rotação de eixos para reduzir uma equação do 2.º grau à sua forma mais simples.

A ESCOLA PITAGÓRICA NOS DESPERTOU PARA O SUBLIME PRAZER DE PENSAR

Incomensuráveis méritos devem ser atribuídos a Pitágoras, porém o famoso teorema que leva o seu nome – que relaciona a soma dos quadrados dos catetos com o quadrado da hipotenusa num triângulo

retângulo – já era conhecido dos babilônios, chineses e hindus, alguns séculos antes.

Ademais, Pitágoras deve ser considerado uma figura imprecisa historicamente, já que nada deixou escrito. As primeiras referências desse monumental legado deve-se a Fololaus, aproximadamente cem anos após a sua morte, que teria ocorrido pelo ano de 497 a.C. Mais tarde, também Platão fez menção aos seus ensinamentos – não se referindo à pessoa física e sim à Escola Pitagórica, expressão que julgamos mais adequada.

Pitágoras nasceu na ilha de Samos, então Ásia Menor e por 30 anos percorreu o Egito, Babilônia, Síria e quicá Pérsia e Índia, onde acumulou ecléticos conhecimentos em geometria, aritmética, astronomia, ciências, filosofia, misticismo e religião. Por muitos anos permaneceu no Egito, onde se fez sacerdote para melhor entender dos ritos e religiosidades.

Por volta de seus 50 anos, Pitágoras retorna a terra natal e se indispondo com um governante tirano, decidiu emigrar para a ilha de Crotona, de dominação grega, no sul da Itália. Ali se estabeleceu, aglutinando uma plêiade de mais de uma centena de membros – a quem alguns historiadores concedem a honra de ser a primeira universidade do mundo.

A Escola Pitagórica e suas atividades se viram desde então envolvidas por um véu de mitos e lendas, se notabilizando por séculos como uma irmandade intelectual e espiritualista, que praticavam a lealdade entre si e a distribuição dos bens materiais.

Politeístas e místicos sim, preponderava uma espécie de sincretismo religioso entre eles, inclusive a crença na imortalidade da alma, cujo aperfeiçoamento ocorreria através de sucessivas reencarnações em corpos vivos. No cotidiano, práticas de purificação, elevação moral através de uma vida ascética, austera, devoção à obediência, à lealdade, aos segredos da Escola e combate à preguiça e à cólera. Seus aforismas passam os séculos pelos valores que ensinam, e peço licença para lembrar dois deles: “Com organização e tempo encontra-se o segredo de fazer tudo e tudo fazer bem” ou “Ajuda teus semelhantes a levantar a carga, mas não a carregues”.

Os estudos de aritmética, geometria, música e astronomia eram as formas de purificação da mente. E para purificar o corpo abstinham-se de beber vinho e comer carne – daí ser falsa a versão de que Pitágoras teria comemorado a demonstração do teorema que leva o seu nome com a matança de cem bois. A propósito, a palavra hecatombe provém dessa lenda (do grego, hecaton significa cem) e que chegou até os nossos dias em seu sentido figurado, significando carnificina, grande derramamento de sangue.

Também da etimologia grega, a palavra matemática surgiu com os pitagóricos (mathematikós), com a concepção de um sistema de pensamento em bases dedutíveis, e deles advêm o conhecido aforisma de que

“a matemática é o alfabeto com o qual os deuses escreveram o universo”. Até então a geometria e a aritmética tinham um caráter utilitário, intuitivo, fulcrado em problemas práticos. Na aritmética, devemos aos pitagóricos a classificação dos números em pares, ímpares, primos e racionais (estes são todos os números que podem ser representados na forma de fração).

As lendas que sobrevivem os séculos em geral são deliciosas, pois são eivadas de fantasias. Conta uma dessas narrativas que grande celeuma se instalou entre os pitagóricos dada a irracionalidade da raiz quadrada de dois. Como explicar um triângulo retângulo cujos catetos são iguais a 1 e o resultado da hipotenusa seja um número não admitido por eles? Os números tinham preceitos místicos e mesmo assim um ousado discípulo chamado Hipasus de Metapontum propôs uma solução para o problema admitindo números fora do espectro dos racionais. O que aconteceu com o infeliz? Reza a lenda que foi expulso da comunidade e atirado ao mar.

Narrativas fatídicas à parte, dos pitagóricos advêm estudos sistematizados de alguns poliedros e polígonos regulares, sobre proporções, números decimais e a seção áurea ou divina. Na astronomia, os pitagóricos cristalizaram a ideia de que há uma ordem que domina o cosmo (termo também criado por eles, do grego cosmos, que significa ordem, harmonia) e que as leis que regem o universo podem ser expressas por relações matemáticas. Pela acurada observação dos astros admitiram teorias inovadoras, a despeito de nem sempre serem corretas: a Terra é esférica e distinguem as estrelas dos planetas, sendo que estes se moviam em órbitas circulares distintas ao redor da Terra.

A Escola Pitagórica representa um dos importantes marcos da nossa civilização, pois a despertou para o sublime prazer de pensar, que culminou com o retumbante pensamento cartesiano “cogito, ergo sum”. Não me contenho e peço licença para concluir com mais dois ensinamentos atribuídos a Pitágoras: “Não é livre quem não consegue ter domínio sobre si” ou “Educai as crianças e não será preciso punir os homens”.

EUCLIDES (c.325 - c.265 a.C.)

Ignora-se o local e ano de nascimento de Euclides. Provavelmente, tenha recebido os primeiros ensinamentos de Matemática dos discípulos de Platão.

Ptolomeu I - general macedônio favorito de Alexandre, o Grande, morto em 323 a.C. - trouxe Euclides de Atenas para Alexandria. Esta tornou-se a nova capital egípcia no litoral mediterrâneo e centro econômico e intelectual do mundo helenístico. Euclides fundou a Escola de Matemática na renomada Biblioteca de Alexandria, que pode ter alcançado a cifra de 700.000 rolos (papiros e pergaminhos).

Alexandria, a partir de Euclides até o séc. IV d.C., reinou quase absoluta não só como a mais eclética e cosmopolita cidade da antiguidade.

de, mas também como principal centro de produção matemática.

A mais conspícua obra de Euclides, *Os Elementos* (c. 300 a.C.), constitui um dos mais notáveis compêndios de Matemática de todos os tempos, com mais de mil edições desde o advento da imprensa (a primeira versão impressa de *Os Elementos* apareceu em Veneza em 1482). Tem sido - segundo George Simmons - "considerado como responsável por uma influência sobre a mente humana maior que qualquer outro livro, com exceção da Bíblia".

Conta-se que o rei Ptolomeu, tendo folheado *Os Elementos*, perguntou esperançosamente a Euclides se não havia um caminho mais suave para aprender Geometria. Lacônico, Euclides teria respondido: "Não há uma estrada real para a Geometria".

Os Elementos são uma compilação metódica e ordenada de 465 proposições reunidas em 13 livros. Sua característica é o rigor das demonstrações, o encadeamento lógico dos teoremas, axiomas e postulados e a clareza na exposição. Sua proposta é uma Geometria dedutiva, despreocupada das limitações práticas, contrastando com a Geometria egípcia, de caráter indutivo e fulcrada em problemas concretos.

Dos 13 livros em que se subdividem *Os Elementos*, os 6 primeiros tratam da Geometria Plana Elementar; os 3 seguintes, da Teoria dos Números, o livro X trata dos Incomensuráveis (números irracionais) e os 3 últimos, da Geometria no Espaço.

O livro XIII de *Os Elementos* aborda exclusivamente as propriedades dos 5 sólidos regulares - denominados *Poliedros de Platão*. Lembramos que um poliedro (do grego poli (muitas) + edro (faces)) é um sólido cuja superfície é constituída de faces poligonais. O poliedro é regular se suas faces forem polígonos regulares. Há apenas 5 poliedros regulares: o tetraedro (4 faces triangulares), o cubo ou hexaedro (6 faces quadradas), o octaedro (8 faces triangulares), o dodecaedro (12 faces pentagonais) e o icosaedro (20 faces triangulares).

Faz-se oportuna a asserção de George Simmons: "A construção de poliedros regulares fornece um clímax soberbo à Geometria de Euclides, e alguns conjecturam que esse foi o propósito primeiro pelo qual *Os Elementos* foram escritos: o de glorificar os Poliedros de Platão". Na proposição 18, a última de *Os Elementos*, Euclides prova que não pode haver um outro poliedro regular, além dos 5 mencionados.

Euclides foi sinônimo de Geometria e reinou absoluto até o séc. XIX, quando foi parcialmente contestado o seu famoso 5.º postulado, por Riemann, Lobatchewski e Bolyai (criadores das geometrias não-euclidianas).

A bibliografia de Euclides é eclética e valiosa: *Os Dados* (solução de problemas geométricos planos, que complementavam os 6 primeiros volumes de *Os Elementos*); *Da Divisão* (trata da divisão de figuras planas);

Fenômenos (geometria esférica aplicada à astronomia); *Óptica* (que trata da geometria dos raios refletidos e dos raios refratados); *Introdução Harmônica* (música).

E para desfortuna de milhares de matemáticos, muitas das obras de Euclides se perderam: Lugares de superfície, Pseudaria, Porismas (que pode ter representado algo próximo da nossa atual Geometria Analítica). Precipuamente, lamenta-se o desaparecimento de *As Cônicas* de Euclides, que, conforme referências, deve ter tratado de esfera, cilindro, cone, elipsoide, parabolóide, hiperbolóide, etc.

A Biblioteca de Alexandria estava muito próxima do que se entende hoje por Universidade. E se faz apropriado o depoimento do insigne Carl B. Boyer, em *A História da Matemática*: "A Universidade de Alexandria evidentemente não diferia muito de instituições modernas de cultura superior. Parte dos professores provavelmente se notabilizou na pesquisa, outros eram melhores como administradores e outros ainda eram conhecidos pela sua capacidade de ensinar. Pelos relatos que possuímos, parece que Euclides definitivamente pertencia à última categoria. Nenhuma descoberta nova é atribuída a ele, mas era conhecido pela sua habilidade ao expor. Essa é a chave do sucesso de sua maior obra - *Os Elementos*."

ARQUIMEDES (287(?) – 212 a.C.)

A genialidade de Arquimedes como físico-matemático só é comparável com Isaac Newton, no séc. XVIII. Sua produção é completamente original e muito vasta, incluindo Geometria Plana e Sólida, Astronomia, Aritmética, Mecânica e Hidrostática.

Nasceu na ilha grega da Sicília, na cidade de Siracusa. Quando jovem estudou em Alexandria, o templo do saber da época, com os discípulos de Euclides.

Suas invenções engenhosas, suas máquinas de caráter utilitário e bélico, o memorizaram através dos séculos por historiadores romanos, gregos, bizantinos e árabes.

Arquimedes, no entanto, considerava seus engenhos mecânicos como fator episódico e que, de certa forma, tiravam a dignidade da ciência pura. "Sua mentalidade não era a de um engenheiro, mas sim, a de um matemático".

Alguns de seus feitos são clássicos e conhecidos, mas merecem ser lembrados:

Por descrição de Vitruvius, conhecemos a história da coroa do rei Herão. Este havia encomendado a um ourives uma coroa de ouro puro. Uma vez pronta, o desconfiado rei Herão solicitou a Arquimedes que analisasse a coroa e dirimisse a dúvida: era a coroa de ouro puro ou feita de uma amálgama com prata?

Jacir. J. Venturi

Quando tomava banho, Arquimedes observou que, à medida que seu corpo mergulhava na banheira, a água transbordava. Foi o *insight* para resolver o problema.

Conta o historiador Vitrúvio que Arquimedes, eufórico, teria saído pelas ruas, completamente nu, gritando "Eureka, eureka", que significa "Achei, achei".

Refeito do vexame, Arquimedes comprovou que houve fraude por parte do ourives. Destarte, tomou dois recipientes cheios de água e num recipiente imergiu um bloco de ouro e noutro recipiente, um bloco de prata. Como ambos os blocos continham o mesmo peso que a coroa, comprovou a fraude, pois constatou que os blocos deslocavam quantidades diferentes de água.

Deste fato decorre o *princípio de Arquimedes*, lei básica da Hidrostática: Todo corpo mergulhado num fluido recebe um impulso de baixo para cima igual ao peso do volume do fluido deslocado.

Paradoxalmente, Arquimedes era muito negligente em termos de asseio pessoal. Lê-se em Plutarco que Arquimedes "era por vezes levado à força para banhar-se ou passar óleo no corpo, que costumava traçar figuras geométricas nas cinzas do fogo, e diagramas no óleo de seu corpo, estando em um estado de preocupação total e de possessão divina, no sentido mais verdadeiro, por seu amor e deleite pela ciência".

Na 2.^a Guerra Púnica, contra a poderosa raia do exército e marinha romanos, comandados pelo Cônsul Marcelo, a sagacidade de Arquimedes criou aparatos devastadores:

- catapultas de grande alcance para lançar blocos de pedra sobre as galerias inimigas;
- gigantescos guindastes que elevavam a proa dos navios romanos, afundando-os pela popa;
- um enorme espelho que incendiava os navios hostis à distância, uma vez que refletiam os raios solares.

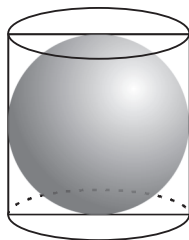
Plutarco conta que se instalou tamanho temor e angústia entre as tropas romanas, que qualquer corda ou pau sobre as muralhas de Siracusa era considerado uma artimanha diabólica de Arquimedes.

Marcelo desistiu de tomar Siracusa por assalto e infligiu um cerco de 3 anos. Em 212 a.C. a cidade rendeu-se.

Adentrando-se às muralhas de Siracusa as hostes romanas promoveram a pilhagem, seguida de uma sangrenta matança. Um soldado aproximou-se de um encanecido senhor de 75 anos, que indiferente à chacina, desenhava diagramas na areia e absorto balbuciou: "Não perturbes os meus círculos". O soldado enraivecido trespassou-o com a espada.

Foram as derradeiras palavras de Arquimedes.

Marcelo, que havia dado ordens expressas para que se poupasse a vida de seu arquirival, ficou muito entristecido e providenciou que lhe concedesse um enterro com honras. Mandou erigir um monumento e, satisfazendo o desejo de Arquimedes, foi gravada na lápide de seu túmulo a representação de uma esfera inscrita num cilindro circular reto cuja altura é igual ao seu diâmetro, pois ele havia descoberto e provado as relações matemáticas (notação hodierna):



$$V_{\text{ci}} = \frac{3}{2} V_{\text{esf.}}$$

$$S_{\text{ci}} = \frac{3}{2} S_{\text{esf.}}$$

Outros inventos notáveis ou estudos de Arquimedes:

- Um mecanismo feito de tubos em hélice, fixos a um eixo inclinado com uma manivela para fazê-lo girar. Tem por escopo elevar a água a um plano superior, conhecido como "parafuso de Arquimedes". É um processo rudimentar, mas que foi usado por muitos séculos.

- Descobriu o princípio da alavanca e cunhou o célebre aforisma: "Dê-me um ponto de apoio e levantarei o mundo".

- Conta Plutarco que Arquimedes arrastou uma das galeras do rei Herão tão suave e uniformemente como se navegasse em pleno mar, movendo apenas com sua mão, a extremidade de um engenho que consistia em um bloco com polias e cordas.

- Relata Cícero que Arquimedes construiu um empolgante mecanismo hidráulico, com esferas móveis que representavam o Sol, a Lua, os cinco planetas (conhecidos), podendo-se observar as fases e os eclipses da Lua. Enfim, um pequeno planetário.

A grandeza também se manifesta na Matemática:

- No tratado *Sobre as Medidas do Círculo*, Arquimedes, em um círculo dado, inscreveu e circunscreveu um polígono de 96 lados e obteve a fórmula para o cálculo da área do círculo e, por muitos séculos, o mais acertado valor para π :

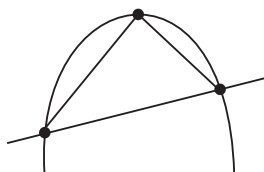
$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{10}{70}$$

Obs.:

A obtenção da área do círculo através de polígonos ficou conhecida como a "quadratura do círculo". Apenas à guisa de ilustração, o símbolo π não foi usado na antiguidade grega no sentido atual. A introdução do símbolo só aconteceu em 1706, por William Jones, um amigo de Newton.

A letra π é a inicial da palavra grega *περιφέρεια* que significa periferia, circunferência. Sabemos que $\pi = 3,1415926535\dots$ é um número irracional. Em 1988, o japonês Yasumasa Kanada conseguiu calcular o π com 200 milhões de casas decimais. O supercomputador da época, usado por Y. Kanada levou apenas 6 horas para fazer os cálculos. Foi um marco histórico da programação computacional.

- No tratado a *Quadratura da Parábola*, Arquimedes demonstra que a área contida por um parábola (S_p) e uma reta transversal é $\frac{4}{3}$ da área do triângulo (S_Δ) com a mesma base e cujo vértice é o ponto onde a tangente à parábola é paralela à base.



$$S_p = \frac{4}{3} S_\Delta$$

Ainda neste mesmo tratado, o ilustre siracusano foi provavelmente o primeiro a saber e provar que a área da esfera é $4\pi R^2$, em notação atual.

- No livro *O Equilíbrio de Planos*, trata do centro de gravidade de figuras sólidas e planas (triângulo, trapézio, segmento de parábola, etc.).

- No tratado *Dos Conoides e Esferoides*, Arquimedes obtém a área de uma elipse ($S = \pi ab$) e descreve sólidos de revolução gerados por parábolas, elipses e hipérbolas em torno de seus eixos (quádricas de revolução).

- O tratado *Sobre Espirais* descreve a curva hoje conhecida como Espiral de Arquimedes (em coordenadas polares tem equação $\rho = k\theta$) e pela primeira vez determina a tangente a uma curva que não seja o círculo.

- De forma inédita, Arquimedes apresenta os primeiros conceitos

de limites e cálculo diferencial.

APOLÔNIO DE PERGA (262(?) – 190(?) a.C.)

Parece ter-se considerado um cordial rival de Arquimedes, e muito pouco se sabe de sua vida. Nasceu em Perga, sul da Ásia Menor, em data desconhecida. Supõe-se ter sido educado em Alexandria e por algum tempo ter ensinado em sua "Universidade". Graças ao apoio de Lisímaco, general de Alexandre, transferiu-se para Pérgamo (donde a palavra pergaminho), onde havia uma biblioteca e uma "Universidade" só inferiores às de Alexandria.

Apolônio, e não Euclides, mereceu dos antigos o epíteto de o Grande Geômetra e isto pode nos parecer inaceitável. A verdade é que não se pode questionar o mérito de ambos. Euclides tornou-se sinônimo de Geometria por sua amplamente conhecida obra *Os Elementos*, enquanto a maior parte das obras de Apolônio desapareceram.

O que sabemos dessas obras perdidas devemos a Pappus de Alexandria (séc. IV d.C.), que fez uma breve descrição de sua grande produção matemática. Infere-se que os tratados de Apolônio continham uma Matemática bastante avançada e inclusive muito do que conhecemos hoje como Geometria Analítica.

Para gáudio de todos, porém, o tratado *As Cônicas*, sobre seções cônicas, suplantou todas as obras existentes na antiguidade. O tratado *As Cônicas* é composto de 8 livros, sete dos quais sobreviveram.

Faz-se oportuno um superficial epítome de *As Cônicas* (embora haja dificuldade em fazê-lo dada a amplitude e a profundidade da obra):

- as seções cônicas não possuíam uma terminologia apropriada. Foi Apolônio quem introduziu os nomes elipse e hipérbole. A palavra parábola deve-se provavelmente a Arquimedes;

- pela primeira vez Apolônio mostrou que de um único cone podem ser obtidas a elipse, a parábola e a hipérbole, simplesmente variando a inclinação do plano de seção;

- até então o cone utilizado era de uma só folha. Introduzindo o cone duplo (de duas folhas), Apolônio apresenta a hipérbole como uma curva de dois ramos, que nos é familiar;

- as propriedades das curvas não diferem conforme sejam obtidas em cones retos ou oblíquos;

- embora Apolônio não se reportasse a um sistema de eixos (em Geometria Analítica ditos cartesianos), via de regra, utilizava um par de diâmetros conjugados como equivalentes aos eixos oblíquos;

- Apolônio conhecia a hipérbole equilátera, a hipérbole referida às assíntotas, polo, reta polar de um ponto externo à cônica;

- o matemático de Perga descreve um profundo estudo sobre tangentes e normais a uma cônica.

Aos que buscam um conhecimento mais profundo do tratado *As Cônicas*, recomendamos a leitura do capítulo 9, de *História da Matemática* por Carl B. Boyer. A propósito, este escreve: "Foi a Matemática Pura de Apolônio que permitiu, cerca de 1.800 anos mais tarde, os *Principia* de Newton; este, por sua vez, deu aos cientistas de hoje condições para que a viagem de ida e volta à Lua fosse possível".

Igualmente é inegável a influência de Apolônio sobre Ptolomeu. Este foi astrônomo e geógrafo e fez observações em Alexandria de 127 a 151 d.C.. Suas obras mais famosas são o *Almagesto* (astronomia) e a *Geografia* (8 volumes).

Ptolomeu introduziu as tabelas trigonométricas, o sistema de latitude e longitude tal como é usado hoje em cartografia, usou métodos de projeção e transformações estereográficas. Catalogou cerca de 8.000 cidades, rios e referenciais importantes. Até a Idade Média, os mapas tinham como protótipos os mapas elaborados por Ptolomeu. E sobre tais mapas se debruçou Colombo muitas vezes antes de empreender sua viagem à América.

Ademais, *As Cônicas* de Apolônio tiveram forte influência nos estudos de Kepler. Em 1609, Kepler edita a *Astronomia Nova*, onde apresenta a principal lei da astronomia: "os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, com o Sol ocupando um dos focos". A propósito, a palavra foco é devida a Kepler e provém da forma latinizada focus, cuja acepção é fogo, lareira.

Outra aplicação prática de *As Cônicas* aparece na obra *Os dois principais sistemas* (1632), de Galileu, em que "desprezando a resistência do ar, a trajetória de um projétil é uma parábola". Ademais, Galileu se reporta à componente horizontal e à componente vertical de uma parábola.

Enfim, Leibniz se faz oportuno: "Quem entende Arquimedes e Apolônio, admirará menos as realizações dos homens mais célebres de épocas posteriores".

GEOMETRIA ANALÍTICA: SINOPSE HISTÓRICA

Depreende-se que foi extraordinário o incremento dado à Geometria Plana e Espacial pelos matemáticos helenísticos. Porém, não

dispunham de uma notação algébrica adequada. Que nos perdoem pelo exagero da simplificação, mas podemos afirmar que a Álgebra possui uma dupla paternidade: Diofanto e al-Khowarizmi.

Diofanto de Alexandria viveu no séc. III d.C., e sua principal obra foi *Aritmética*, tratado que originalmente era composto de 13 livros, dos quais só os 6 primeiros se preservaram. O principal mérito da *Aritmética* é a utilização de notações, ou seja, de uma linguagem mais sincopada, mais simbólica para a Matemática.

Por seu turno, al-Khowarizmi viveu por volta de 800 d.C. na cidade de Bagdá, que emerge como uma nova Alexandria. Sua principal obra *Al-Jabr* deixou marcas indeléveis em toda a Europa. *Al-Jabr* recebeu a forma latinizada *Algebrae* (Álgebra). As palavras algarismo e algoritmo são provavelmente corruptelas de al-Khowarizmi (algorismi \Rightarrow algarismo \Rightarrow algoritmo).

Em árabe *Al-Jabr* significa, numa tradução mais livre, deslocação e parece "referir-se à transposição de termos subtraídos para o outro lado da equação".

Os símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tiveram notável receptividade na Europa através da obra de al-Khowarizmi. Daí serem denominados algarismos arábicos, mas que a bem da verdade são de origem hindu.

Fulcrado nos geômetras gregos e no desenvolvimento da álgebra em toda a Europa, Pierre de Fermat conclui em 1629 o manuscrito *Ad locos planos et solidos isagoge* (Introdução aos lugares planos e sólidos). Para a maioria dos historiadores, tal manuscrito representa o marco zero da Geometria Analítica.

É curioso observar que Fermat não era um matemático. Estudou Direito em Toulouse, na França, e aí exerceu o cargo de advogado e conselheiro do parlamento. Fermat tinha a Matemática como um "hobby" e mesmo assim foi considerado por Pascal o maior do seu tempo.

Desafiou a têmpera racional de muitas gerações de matemáticos com o notabilíssimo Último Teorema de Fermat. Às margens da *Arithmética* de Diofanto, Fermat escreveu: "Não desenvolvo aqui a demonstração deste teorema por falta de espaço." (ver pág. 33 do nosso livro *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica*). Dedicou-se aos pensadores clássicos e à matemática grega e segundo Carl B. Boyer, a obra *As Cônicas* de Apolônio foi uma das obras favoritas de Fermat.

Coube a Pierre de Fermat (1601-1665) a descoberta das equações da reta e da circunferência, e as equações mais simples da elipse, da parábola e da hipérbole. Aplicou a transformação equivalente à atual rotação de eixos para reduzir uma equação do 2.º grau à sua forma mais sim-

ples. É cristalina em Fermat a percepção de uma Geometria Analítica a três dimensões: "Mas se o problema proposto envolve três incógnitas, deve-se achar, para satisfazer a equação, não apenas um ponto ou uma curva, mas toda uma superfície".

É oportuno observar que a usual denominação sistema cartesiano (Cartesius é a forma latinizada de Descartes) é anacrônica historicamente, pois sua obra não contém eixos perpendiculares, eixos oblíquos, nem tampouco a equação de uma reta. Por mérito, o sistema cartesiano deveria denominar-se sistema fermatiano.

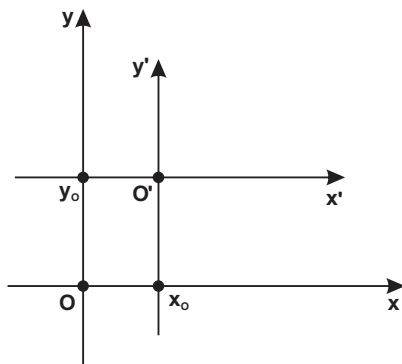
Indubitavelmente, René Descartes (1596-1650) é considerado o pai da filosofia moderna pela sua obra *Discours de la Méthode*, publicada em 1637. O terceiro apêndice desta obra chama-se *La Géométrie* e é uma aplicação da álgebra aos problemas geométricos, mas quase nada trata do que se entende hoje por Geometria Analítica. Segundo George Simmons "La Géométrie foi pouco lida então e menos lida hoje, e bem merecidamente".

O autor

Uma vez conhecidas as coordenadas de um ponto ou a equação de uma curva em relação a um certo sistema de referência, trataremos neste capítulo das novas coordenadas do ponto ou da nova equação da curva em relação a um novo sistema de referência. Assim, a curva cuja equação $f(x, y) = 0$ quando referida a um **sistema de coordenadas cartesianas xOy** transformar-se-á numa equação do tipo $F(x', y') = 0$, quando referida a um novo sistema de coordenadas cartesianas $x'O'y'$.

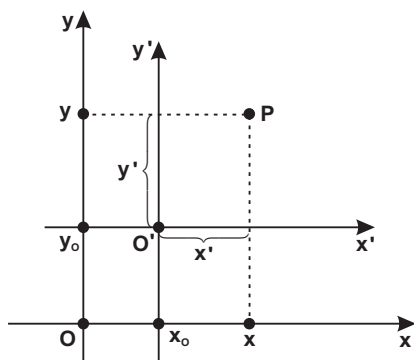
Este novo sistema é obtido através de **uma translação de eixos** e/ou uma **rotação de eixos**. Enfatize-se que numa **transformação de coordenadas** (mediante uma rotação ou translação) não é afetada a forma da curva ou o gráfico da curva. No entanto, há alteração na equação da curva.

1. TRANSLAÇÃO DE EIXOS



No plano cartesiano xOy considere um ponto $O' = (x_0, y_0)$. Introduza um **novo** sistema $x'O'y'$ tal que O' seja a nova origem e o eixo $O'x'$ tenha a mesma direção e sentido de Ox e $O'y'$ tenha a mesma direção e sentido de Oy .

Dizemos que o **novo** sistema $x'O'y'$ foi obtido por uma **translação** do **antigo** sistema xOy . Em ambos os sistemas se conservam as unidades de medida.



Um ponto P do plano tem coordenadas:

* x e y em relação ao sistema xOy.

* x' e y' em relação ao sistema x'O'y'.

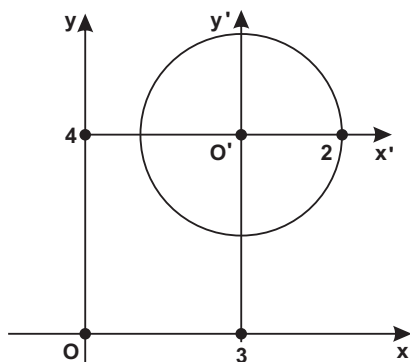
Obtemos facilmente da figura as **fórmulas de translação**:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}$$

Exemplo:

Considere a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ em relação ao sistema xOy. Faça uma translação de eixo tal que a nova origem seja $O' = (3, 4)$. Obtenha a equação da circunferência em relação ao novo sistema x'O'y'.

RESOLUÇÃO:



a) Fórmulas de translação:

$$\begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' + 4 \end{cases}$$

b) Substituindo x e y por seus valores na equação da circunferência:

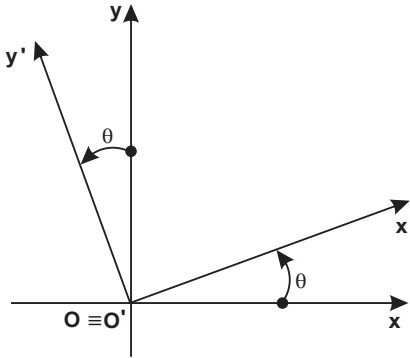
$$\begin{aligned} (x' + 3)^2 + (y' + 4)^2 - 6(x' + 3) - 8(y' + 4) + 21 &= 0 \end{aligned}$$

Efetuando-se:

$$x'^2 + y'^2 = 4 \text{ (circunferência)}$$

A circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ se transforma na equação $x'^2 + y'^2 = 4$ mediante uma translação de eixos, sendo a nova origem $O' = (3, 4)$ e raio igual a 2.

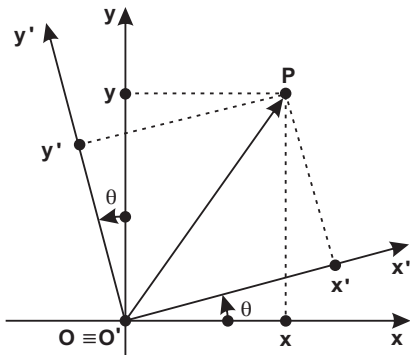
2. ROTAÇÃO DE EIXOS



Preliminarmente consideremos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy . Mantendo fixa a origem O , faz-se uma rotação nos eixos Ox e Oy de um mesmo ângulo, no sentido anti-horário. Obtemos assim um novo sistema $x'O'y'$ por uma rotação de xOy .

a) Fórmulas de rotação

Um ponto P que tem coordenadas (x, y) em relação ao sistema xOy , após uma rotação de eixos assume coordenadas (x', y') em relação ao novo sistema $x'O'y'$.



Na figura ao lado:

$$(P - O) = (P - O')$$

$$(x \vec{i} + y \vec{j}) = x' \vec{i}' + y' \vec{j}' \quad \textcircled{1}$$

onde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{i}'$ e \vec{j}' são respectivamente os versores dos eixos x, y, x' e y' .

a) Multiplicando escalarmente $\textcircled{1}$ por \vec{i} :

$$(\vec{x}\vec{i} + y\vec{j} \cdot \vec{i}) = (x'\vec{i} + y'\vec{j} \cdot \vec{i}) \quad \textcircled{2}$$

Mas:

$$\left. \begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} &= 1 \\ \vec{j} \cdot \vec{i} &= 0 \\ \vec{i}' \cdot \vec{i} &= |\vec{i}'| |\vec{i}| \cos x'x = \cos \theta \\ \vec{j}' \cdot \vec{i} &= |\vec{j}'| |\vec{i}| \cos y'x = \cos(90^\circ + \theta) = -\text{sen } \theta \end{aligned} \right\} \quad \textcircled{3}$$

Substituindo $\textcircled{3}$ em $\textcircled{2}$:

$$x = x' \cos \theta - y' \text{sen } \theta$$

b) Multiplicando escalarmente $\textcircled{1}$ por \vec{j} obtemos por cálculos análogos:

$$y = x' \text{sen } \theta + y' \cos \theta$$

Como se viu, deduzimos vetorialmente as **fórmulas de rotação**:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \text{sen } \theta \\ y &= x' \text{sen } \theta + y' \cos \theta \end{aligned}$$

b) Tabela das fórmulas de rotação

Com o escopo mnemônico, transcrevemos a tabela abaixo. Observe que a 2.^a coluna nada mais é do que a **derivada** da 1.^a coluna.

x	x'	y'
x	cos θ	- sen θ
y	sen θ	cos θ

Exemplo: A equação $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$ representa uma **elipse** no sistema xOy . Obter a equação da mesma elipse uma vez efetuada a rotação de eixos de amplitude $\theta = 45^\circ$.

RESOLUÇÃO:

a) Fórmulas de rotação:

$$x = x' \cos 45^\circ - y' \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}'}{2} x' - \frac{\sqrt{2}'}{2} y' = \frac{\sqrt{2}'}{2} (x' - y')$$

$$y = x' \operatorname{sen} 45^\circ + y' \operatorname{cos} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y')$$

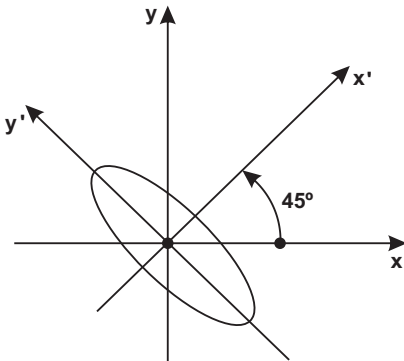
b) Substituindo x e y por seus valores na equação dada:

$$5 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y') \right]^2 + 6 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y') \right] \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y') \right] + 5 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y') \right]^2 - 8 = 0$$

c) Desenvolvendo e simplificando, a equação acima reduz-se a:

$$4x'^2 + y'^2 = 4$$

d) Gráfico:



A equação

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$$

foi transformada na equação $4x'^2 + y'^2 = 4$ mediante uma rotação de $\theta = 45^\circ$. Veremos que a equação transformada é de longe, muito mais fácil de se representar graficamente.

Obs.:

Parábola, elipse e hipérbole serão estudadas nos três próximos capítulos. Didaticamente merece ressaltar a postura de se reportar a uma curva que ainda não foi apresentada.

Justifiquemos:

- 1) As equações mais simples (ditas canônicas) da parábola, elipse e hipérbole fazem parte do conteúdo programático do Ensino Médio.
- 2) Nosso escopo no presente capítulo não é enfatizar o gráfico da curva e sim a rotação e/ou translação de eixos cartesianos.

Exercícios

"Deus dá a todos uma estrela, uns fazem da estrela um sol. Outros nem conseguem vê-la."

Helena Kolody, poeta e escritora paranaense.

01. Transformar a equação $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 5 = 0$ por meio de uma translação de eixos, considerando a nova origem no ponto $(1, 2)$.

Resp.: $x'^2 + 4y'^2 - 12 = 0$

02. Por meio de uma rotação de eixos de amplitude $\frac{\pi}{4}$ rad., transformar a equação $x^2 - y^2 = 4$.

Resp.: $x'y' = -2$

03. Obter a nova equação da reta $3x - 4y + 10 = 0$ quando se efetua uma rotação de eixos de amplitude θ , sabendo-se que $\sin \theta = \frac{3}{5}$.

Resp.: $y' - 2 = 0$

04. Por meio de uma rotação de eixos de amplitude $\theta = 30^\circ$, transformar a equação $6x^2 + 8y^2 - 2\sqrt{3}xy - 1 = 0$.

Resp.: $5x'^2 + 9y'^2 - 1 = 0$

05. Transformar a equação $xy = 1$ através de uma rotação de eixos de $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad.

Resp.: $x'^2 - y'^2 = 2$

3. APLICAÇÃO DAS TRANSLAÇÕES E ROTAÇÕES NO ESTUDO DE UMA EQUAÇÃO DO 2.º GRAU

O estudo em epígrafe terá aplicações assaz importantes nos capítulos vindouros: elipse, parábola, hipérbole, cônicas.

Assim, seja a equação do 2.º grau em duas variáveis:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Nosso escopo é eliminar nesta equação, um ou mais termos, utilizando uma **translação** e/ou uma **rotação**. Afloram dois tipos de problemas, que serão analisados de per si:

a) Por meio de uma translação eliminar os termos do 1.º grau.

Exemplo: Calcular as coordenadas da nova origem $O' = (x_0, y_0)$ à qual se deve transladar os eixos, para que na equação da circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ desapareçam os termos do 1.º grau.

RESOLUÇÃO:

a) Fórmulas de translação:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}$$

b) Substituindo na equação da circunferência:

$$(x_0 + x')^2 + (y_0 + y')^2 - 4(x_0 + x') - 6(y_0 + y') + 4 = 0$$

c) Desenvolvendo e agrupando convenientemente os termos:

$$x'^2 + y'^2 + (2x_0 - 4)x' + (2y_0 - 6)y' + x_0^2 + y_0^2 - 4x_0 - 6y_0 + 4 = 0 \quad (*)$$

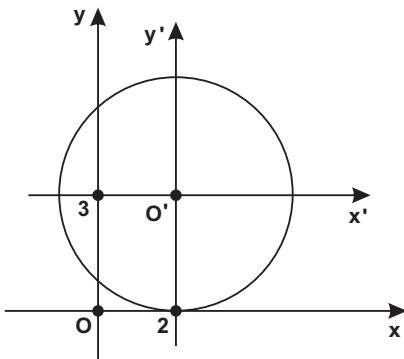
– fazendo o coeficiente de x' igual a zero:

$$2x_0 - 4 = 0 \rightarrow x_0 = 2$$

– fazendo o coeficiente de y' igual a zero:

$$2y_0 - 6 = 0 \rightarrow y_0 = 3$$

Então $O' = (2, 3)$,



d) Substituindo $x_0 = 2$ e

$y_0 = 3$ em (*):

$$x'^2 + y'^2 - 9 = 0$$

que representa a equação de uma circunferência com centro na origem do sistema $x'O'y'$ e cujo raio é 3.

Parecem-nos úteis e práticas as seguintes propriedades (que podem ser verificadas no exemplo acima):

Destarte, da translação podemos concluir que:

1. Dada a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, a translação não afeta os coeficientes dos termos do 2.º grau (A, B, C).

2. Após uma translação com $O' = (x_0, y_0)$ o novo termo independente F' pode ser obtido: $F' = Ax_0^2 + Bx_0y_0 + Cy_0^2 + Dx_0 + Ey_0 + F$.

EXEMPLIFIQUEMOS:

Na equação $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y + 8 = 0$, os termos do 1.º grau são eliminados quando feita uma translação para $O' = (1, -1)$. Em relação ao sistema $x'O'y'$ a nova equação terá a forma $5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 + F' = 0$.

$$\text{Mas, } F' = 5(1)^2 + 6(1)(-1) + 5(-1)^2 - 4(1) - 4(-1) + 8 = 4.$$

$$\text{Resp.: } 5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 + 4 = 0$$

b) Por meio de uma rotação eliminar o termo em xy .

Dada a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (①), o **termo em xy pode ser eliminado** mediante uma rotação de eixos correspondente a um ângulo θ tal que:

$$\text{tg } 2\theta = \frac{B}{A - C} \quad (\text{para } A \neq C)$$

DEMONSTRAÇÃO:

a) Fórmulas de rotação:

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

b) Substituindo ② em ①:

$$A(x' \cos \theta - y' \sin \theta)^2 + B(x' \cos \theta - y' \sin \theta)(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + C(x' \sin \theta + y' \cos \theta)^2 + \dots = 0$$

ordenando os termos em x'^2 , y'^2 e $x'y'$:

$$(A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta)x'^2 + [-2A \sin \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2C \sin \theta \cos \theta]x'y' + (A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta)y'^2 + \dots = 0$$

O termo em xy desaparecerá na equação acima se o seu coeficiente for nulo:

$$(C - A)(2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta) + B(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) = 0$$

$$(C - A) \operatorname{sen} 2\theta + B \cos 2\theta = 0 \quad \textcircled{3}$$

Dividindo por $\cos 2\theta$:

$$(C - A) \operatorname{tg} 2\theta + B = 0$$

ou

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A - C} \quad \textcircled{4} \quad (A \neq C)$$

Cumpre destacar, relativamente à rotação:

- 1) A rotação não afeta o termo independente.
- 2) Adotaremos sempre $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.
- 3) Se em particular $A = C$, então $\textcircled{4}$ não tem sentido, mas de $\textcircled{3}$ obtém-se $B \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = 90^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$.
- 4) O grau de uma equação não é alterado quando se aplica uma transformação de coordenadas.

Exercícios Resolvidos

"Todos sabemos o que somos, mas não o que podemos ser."

William Shakespeare (1564-1616), o maior dramaturgo inglês.

1. Dada a equação $3x^2 - 4xy - 1 = 0$, pede-se para:

a) achar o ângulo de rotação que elimina o termo em xy .

RESOLUÇÃO:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{-4}{3 - 0} = \frac{-4}{3}$$

$$\text{mas } \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{-4}{3}$$

$$\text{Efetuando-se: } 2 \operatorname{tg}^2 \theta - 3 \operatorname{tg} \theta - 2 = 0$$

Equação do 2.º grau cujas raízes são:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = 2$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = -\frac{1}{2}$$

Obs.:

O ângulo agudo θ é obtido pela $\operatorname{tg} \theta = 2 \Rightarrow \theta = 63^{\circ}25'$.

b) Calcular as fórmulas de rotação (para $0^{\circ} \leq \theta \leq 90^{\circ}$).

b.1) Cálculo do $\operatorname{sen} \theta$ e do $\operatorname{cos} \theta$

Obtivemos que $\operatorname{tg} \theta = 2$

$$* \sec^2 \theta = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta = 1 + (2)^2 = 5$$

$$\sec \theta = \sqrt{5}$$

$$* \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$* \operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \operatorname{cos}^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

b.2) Fórmulas de rotação:

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta \\ y = x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$

Substituindo $\operatorname{sen} \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\begin{cases} x = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)x' - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)y' = \frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}} \\ y = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)x' + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)y' = \frac{2x' + y'}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

c) Obter a nova equação no sistema $x'Oy'$ após a rotação de eixos de amplitude θ :

c.1) Substituindo as fórmulas de rotação na equação dada:

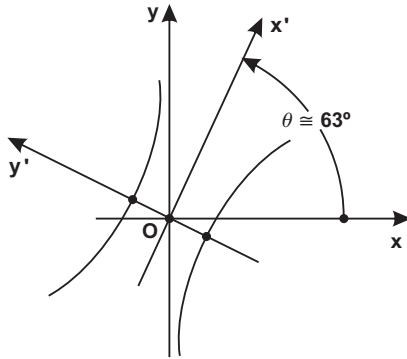
$$3 \left(\frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4 \left(\frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}}\right) \left(\frac{2x' + y'}{\sqrt{5}}\right) - 1 = 0$$

c.2) Efetuando-se os produtos e as somas:

Resp.: $4y'^2 - x'^2 - 1 = 0$

Obs.:

Veremos no Cap. 4 que a equação $4y'^2 - x'^2 - 1 = 0$ representa



uma hipérbole referida ao sistema $x'Oy'$ e a equação dada $3x^2 - 4xy - 1 = 0$ representa a mesma hipérbole porém referida ao sistema xOy . A rotação dos eixos foi de $\theta_1 \cong 63^\circ$. Ao lado (apenas a título de ilustração) representou-se a hipérbole.

2. Transformar a equação $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 6y + 1 = 0$ numa equação do tipo $Ax''^2 + Cy''^2 + F = 0$.

RESOLUÇÃO:

Na equação $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 6y + 1 = 0$ devemos eliminar:

- 1) os termos do 1.º grau (translação)
- 2) o termo em xy (rotação)

Importante: Pode parecer natural que a translação necessariamente preceda à rotação. Mas nem sempre isto é verdadeiro. Há exercícios cuja ordem das transformações é contrária à citada. Alvitramos a seguinte regra prática:

Na equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ se:

$$B^2 - 4AC \neq 0 \begin{cases} 1) \text{ translação} \\ 2) \text{ rotação} \end{cases}$$

$$B^2 - 4AC = 0 \begin{cases} 1) \text{ rotação} \\ 2) \text{ translação} \end{cases}$$

No presente exercício:

$$B^2 - 4AC = (2)^2 - 4(3)(3) \neq 0$$

Ordem das transformações:

- 1) translação
- 2) rotação

2.a) TRANSLAÇÃO

Fórmulas de translação:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}$$

Substituindo na equação dada:

$$3(x_0 + x')^2 + 2(x_0 + x')(y_0 + y') + 3(y_0 + y')^2 - 6(x_0 + x') - 6(y_0 + y') + 1 = 0 \quad (1)$$

Fazendo os coeficientes de x' e de y' igual a zero:

$$\begin{cases} 6x_0 + 2y_0 - 6 = 0 \\ 2x_0 + 6y_0 - 6 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos: $x_0 = \frac{3}{4}$ e $y_0 = \frac{3}{4}$, ou seja,

$$O' = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right).$$

Como na translação para a nova origem $O' = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right)$ são eliminados os termos do 1.º grau, resulta uma equação do tipo:

$3x'^2 + 2x'y' + 3y'^2 + F' = 0$, onde:

$$F' = 3\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + 3\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 6\left(\frac{3}{4}\right) - 6\left(\frac{3}{4}\right) + 1 = \frac{-7}{2}$$

Assim pela translação a equação dada se transforma numa equação do tipo:

$$3x'^2 + 2x'y' + 3y'^2 - \frac{7}{2} = 0 \quad (2)$$

Obs.:

Se levássemos $O' = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right)$ em (1) obteríamos igualmente (2), porém não optado por ser um método mais laborioso, via de regra.

2.b) ROTAÇÃO (para se eliminar o termo em $x'y'$ na equação (2)).

Como na equação dada $A = C \Rightarrow \theta = 45^\circ$

Fórmulas de rotação :

$$\left. \begin{aligned} x' &= x'' \cos 45^\circ - y'' \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' - y'') \\ y' &= x'' \sin 45^\circ + y'' \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' + y'') \end{aligned} \right\} \textcircled{3}$$

Substituindo $\textcircled{3}$ em $\textcircled{2}$:

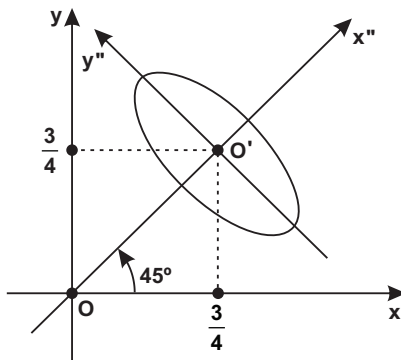
$$\begin{aligned} &3 \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'' - y'') \right]^2 + 2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'' - y'') \right] \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'' + y'') \right] + \\ &+ 3 \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'' + y'') \right]^2 - \frac{7}{2} = 0 \end{aligned}$$

Efetuando os produtos e as somas: $4x''^2 + 2y''^2 - \frac{7}{2} = 0$ $\textcircled{4}$

que é uma equação do tipo $Ax''^2 + By''^2 + F = 0$.

Obs.:

No Capítulo 3 veremos que a equação $\textcircled{4}$ representa uma elipse.



Ao lado, apenas a título de ilustração, figurou-se a elipse em relação ao novo sistema $x''O'y''$, após efetuada uma translação para $O' = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right)$ e uma rotação de amplitude $\theta = 45^\circ$.

Exercícios

"Pior que o ódio é a falta de amor."

Nelson Rodrigues (1912-1980), dramaturgo e jornalista pernambucano.

01. Mediante uma translação de eixos, eliminar os termos do 1.º grau na equação $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 5 = 0$.

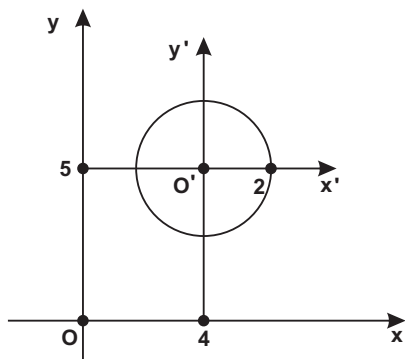
Resp.: $x'^2 + 4y'^2 - 12 = 0$

02. Eliminar os termos do 1.º grau em $2xy - x - y + 3 = 0$ por meio de uma translação de eixos.

Resp.: $4x'y' + 5 = 0$

03. Transforme a equação $x^2 + y^2 - 8x - 10y = -37$ numa equação do tipo $x^2 + y^2 = k$. Construa a figura.

Resp.: $x'^2 + y'^2 = 4$



SUGESTÃO:

Na equação dada devemos eliminar os termos do 1.º grau → translação.

04. Eliminar o termo em xy na equação $x^2 + 4xy + y^2 - 2 = 0$ mediante uma rotação de eixos.

Resp.: $3x'^2 - y'^2 - 2 = 0$

05. Calcular o ângulo θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$) necessário para girar os eixos para que desapareça o termo em xy na equação $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + \sqrt{3}x - y + 3 = 0$ e achar a equação da curva referida aos novos eixos.

Resp.: $\theta = 60^\circ$; $2x'^2 - y'^2 + 3 = 0$

Série B

“Não tenho tempo nem para brigas nem para lamentações; homem algum pode obrigar-me a descer tanto que possa odiá-lo.”

Laurence Jones

06. Transformar a equação $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 1$ numa equação do tipo $Ax'^2 + Cy'^2 = F$.

Resp.: $6x'^2 + y'^2 = 1$

SUGESTÃO:

Na equação dada deve-se eliminar o termo em xy → rotação.

$$\text{Fórmula: } \operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{4}{3} \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ e } \operatorname{cos} \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Com estes valores substitui-se as fórmulas de rotação na equação dada.

07. Reduzir a equação $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4x + 4y - 1 = 0$ à forma $Ax'^2 + Cy'^2 + F = 0$.

$$\text{Resp.: } 8x'^2 + 2y'^2 - 5 = 0$$

SUGESTÃO:

a) Devemos eliminar:

- os termos do 1.º grau → translação.
- o termo em xy → rotação.

b) Ordem das transformações:

$$B^2 - 4AC \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ translação.} \\ 2) \text{ rotação.} \end{array} \right.$$

c) Substituindo as fórmulas de translação na equação dada obtém-se $O' = (1, -1)$ e uma equação do tipo: $5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 + F = 0$.

$$\text{Mas: } F = 5(1)^2 + 5(-1)^2 + 6(1)(-1) - 4(1) + 4(-1) - 1 = -5.$$

$$\text{Então: } 5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 - 5 = 0 \quad \textcircled{1}$$

d) Com a rotação eliminamos o termo em xy na equação $\textcircled{1}$:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{6}{0} \Rightarrow \theta = 45^\circ.$$

Fórmulas de rotação para $\theta = 45^\circ$:

$$\left. \begin{array}{l} x = x' \cos 45^\circ - y' \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y') \\ y = x' \operatorname{sen} 45^\circ + y' \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y') \end{array} \right\} \textcircled{2}$$

e) Levando $\textcircled{2}$ em $\textcircled{1}$ tem-se a resposta.

08. Transformar a equação $y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$ numa equação do tipo $Ay'^2 + Bx' = 0$.

Resp.: $y'^2 - 4x' = 0$

SUGESTÃO:

Deve-se eliminar o termo em y (translação) e o termo independente. Substituindo as fórmulas de translação na equação dada:

$$(y_0 + y')^2 - 4(x_0 + x') - 6(y_0 + y') + 5 = 0 \quad \textcircled{1}$$

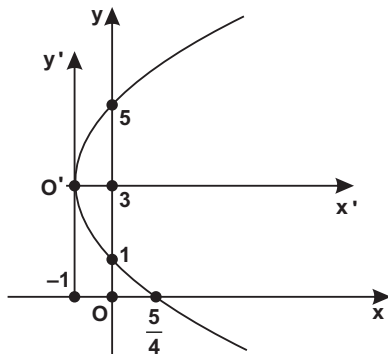
ordenando :

$$y'^2 - 4x' + (2y_0 - 6)y' + \underbrace{y_0^2 - 4x_0 - 6y_0 + 5}_{\text{Termo Independente}} = 0$$

Sistema:

$$\begin{cases} 2y_0 - 6 = 0 \\ y_0^2 - 4x_0 - 6y_0 + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 3 \end{cases}$$

A nova origem é $O' = (-1, 3)$. Levando $x_0 = -1$ e $y_0 = 3$ em $\textcircled{1}$ chega-se à resposta.



À guisa de ilustração: a curva (parábola) de equação $y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$ se transforma na equação $y'^2 - 4x' = 0$ mediante uma translação de eixos, sendo a nova origem $O' = (-1, 3)$. Ademais, observe que a curva (parábola) intercepta o eixo das abscissas no ponto $x = \frac{5}{4}$ (basta fazer $y = 0$ na equação $y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$).

Similarmente, corta o eixo das ordenadas nos pontos 1 e 5 (basta fazer o $x = 0$ na equação $y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$).

09. Transformar a equação $4x^2 + y^2 - 4xy - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$ numa equação do tipo $Ay'^2 + Bx' = 0$.

Resp.: $y'^2 - 8x' = 0$

SUGESTÃO:

a) Ordem das transformações: $B^2 - 4AC = 0$ $\begin{cases} (1) \text{ rotação} \\ (2) \text{ translação} \end{cases}$

b) Ângulo de rotação:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{-4}{3} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ e } \operatorname{sen} \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

c) Fórmulas de rotação: $x = \frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}}$ e $y = \frac{2x' + y'}{\sqrt{5}}$

d) Substituindo as fórmulas de rotação na equação dada obtém-se $y'^2 - 8x' = 0$. Como esta é a forma pedida não há necessidade de translação. A rotação, de per si, eliminou os termos x^2 , xy e y .

AS HABILIDADES PODEM E DEVEM SER DESENVOLVIDAS

Aqueles que desenvolvem adequadamente as chamadas soft skills (habilidades comportamentais) duplicam seu rendimento nas hard skills (habilidades técnicas), aponta um estudo desenvolvido pela McKinsey&Company, renomada consultoria empresarial americana. Em outras palavras, os desempenhos escolar, acadêmico e profissional são potencializados pelas habilidades socioemocionais como criatividade, pensamento crítico, empatia, afeto, tolerância, colaboração, resiliência, positividade, liderança, comunicação interpessoal, gestão do tempo, resolução de problemas, etc.

Deste modo, não foi coincidência quando na atmosfera de bits e bytes do Vale do Silício – onde estivemos em visita oficial a 9 empresas que desenvolvem conteúdos e produtos educacionais – a expressão mais ouvida por nós foi soft skills. O recado é eloquente em meio a tanta tecnologia: o desenvolvimento cognitivo é importante, porém o ambiente abundante em habilidades socioemocionais traz produtividade, felicidade e inovação. De fato, o Silicon Valley é apontado por pesquisas como a região dos EUA mais feliz para se trabalhar, detém o menor índice de criminalidade e tem maior diversidade étnica – cerca de 40% dos que lá trabalham provêm de mais de 60 países.

Até a década de 1980 reinavam absolutos os testes de QI (Quociente de Inteligência) para mensurar a aptidão acadêmica dos estudantes ou o potencial dos funcionários de uma empresa, razão pela qual quem tinha QI aquém de 80 era

alvo de pilhérias e bullying. Foi então que surgiu a Teoria das Inteligências Múltiplas, tendo à frente Howard Gardner, professor e psicólogo da Universidade de Harvard, que investiu sua ira santa contra os testes de QI, e uma significativa transformação aconteceu na psicologia da aprendizagem e, mais tarde, no ambiente corporativo.

Os testes de QI, criados em 1905 pelo pedagogo e psicólogo francês Alfred Binet, basicamente mensuravam as aptidões linguísticas, motoras e de raciocínio lógico. Gardner, por sua vez, deu um novo enfoque a estas três habilidades e propôs mais seis: interpessoal, intrapessoal, artística, espacial e, mais recentemente, a naturalista e a existencial. Hoje incorporadas e valorizadas nos mundos acadêmico e corporativo, conquanto o maior mérito de Gardner foi reconhecer como tipos de inteligência a interpessoal (empatia, capacidade de se relacionar bem com outras pessoas, liderança, etc.) e a intrapessoal (virtudes, autoconhecimento, ética, etc.). Destas decorrem avanços, mas em boa parte não passam por variações semânticas.

A teoria gardneriana tem por fulcro duas premissas básicas: as pessoas são dotadas de inteligências diferentes (as nove já enunciadas) e, apesar de admitida a herança genética, elas podem e devem ser desenvolvidas – pelos estímulos do ambiente, família, escola e pelo esforço pessoal. Todos temos potencialidades e limitações. Einstein, por exemplo, foi reprovado nas disciplinas de humanas, quando buscou o ingresso na Escola Politécnica de Zurique, porém conseguiu a vaga pelo elevado desempenho em matemática e física. Picasso, por sua vez, foi um péssimo aluno nas disciplinas de exatas, porém um gênio nas habilidades artísticas. Assim, Goethe se faz oportuno quando afirma: “nem todos os caminhos são para todos os caminhantes”.

Gardner esteve em Curitiba em 2009, a convite da Universidade Positivo, e fui agraciado como um dos 100 educadores convidados. Afável e empático, o seu primeiro gesto antes de iniciar a palestra foi abrir as cortinas e saudar o sol ainda titubeante daquela congelante manhã de inverno curitibano. E, ao final, quando lhe perguntaram qual a habilidade mais admirada no mundo contemporâneo, deu-nos a impressão de que hesitou como que se tivesse que escolher das nove filhas a mais bela. Porém, não ficamos sem resposta: “é a combinação do pensamento lógico com a capacidade de lidar com as pessoas”. E finalizou: “inteligência é a capacidade de resolver problemas”.

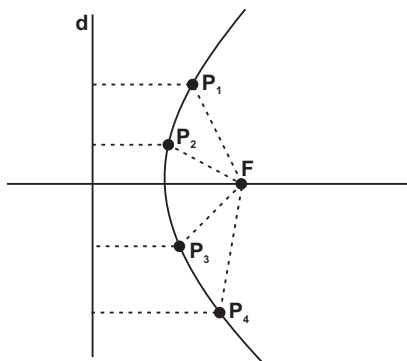
Do autor

Pierre de Fermat (1601-1665), inspirado nos estudos de Apolônio (matemático grego do séc. II a.C.), estabeleceu o princípio fundamental da Geometria Analítica, segundo o qual uma equação do 1.º grau, no plano, representa uma reta e uma equação do 2.º grau, no plano, uma cônica.

Mostrou de uma forma bastante sistemática a equação geral de uma reta, de uma circunferência e as equações mais simples de uma parábola, elipse e hipérbole.

1. DEFINIÇÃO

Considere-se, em um plano α , um ponto F e uma reta d que não contém F. Denominamos parábola de foco F e diretriz d ao lugar geométrico dos pontos do plano α que equidistam de d e F.

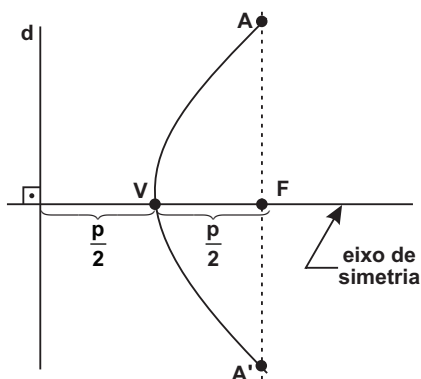


A figura ao lado mostra alguns pontos pertencentes à parábola (equidistantes do ponto F e da reta d).

Obs.:

Na pág. 230 você encontra a etimologia da palavra **parábola**.

2. ELEMENTOS DA PARÁBOLA



Denominamos:

F: foco

d: diretriz

V: vértice

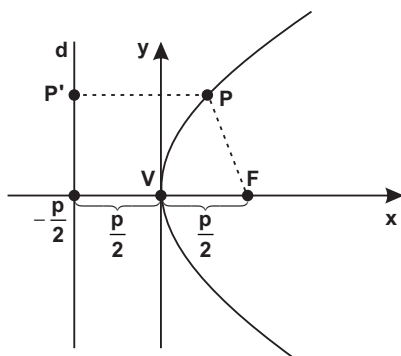
p: parâmetro, que representa a distância do foco à diretriz ($p \neq 0$).

reta VF: eixo de simetria da parábola.

Latus rectum: é a corda AA' que passa pelo foco e é perpendicular ao eixo de simetria. Também chamada de corda focal mínima.

3. EQUAÇÕES CANÔNICAS DA PARÁBOLA ($V \equiv O$)

a) O eixo de simetria coincide com o eixo x.



Na figura ao lado tem-se uma parábola de concavidade voltada para a direita representada no sistema cartesiano xOy . A diretriz tem equação $x = -\frac{p}{2}$.

Ademais:

$P = (x, y)$ é um ponto genérico da parábola.

$F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ é o foco.

$P' = \left(-\frac{p}{2}, y\right)$ é o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre a diretriz.

Por definição :

$$d(P, F) = d(P, P')$$

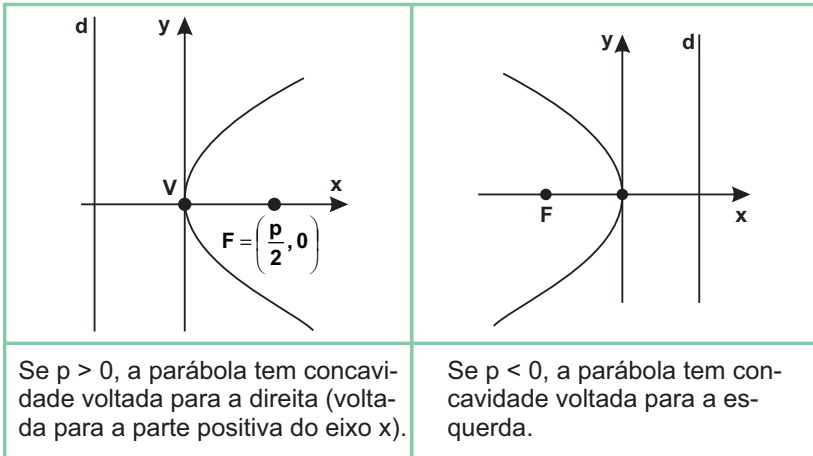
$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e desenvolvendo os produtos notáveis, temos:

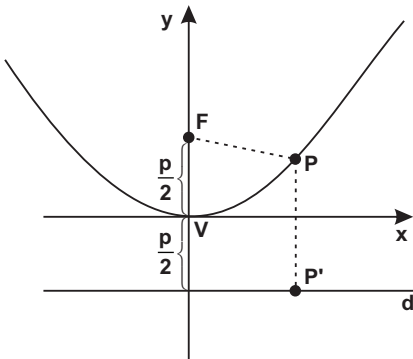
$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \quad \text{onde: } y^2 = 2px \quad \text{que repre-}$$

senta a equação canônica (ou reduzida ou padrão) da parábola com vértice na origem e cujo eixo de simetria é o eixo x.

Na equação $y^2 = 2px$, observe que:



b) O eixo de simetria coincide com o eixo y.



A figura ao lado reproduz uma parábola de concavidade voltada para cima. A diretriz tem equação $y = -\frac{p}{2}$.

Ademais:

$$P = (x, y)$$

$$F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$$

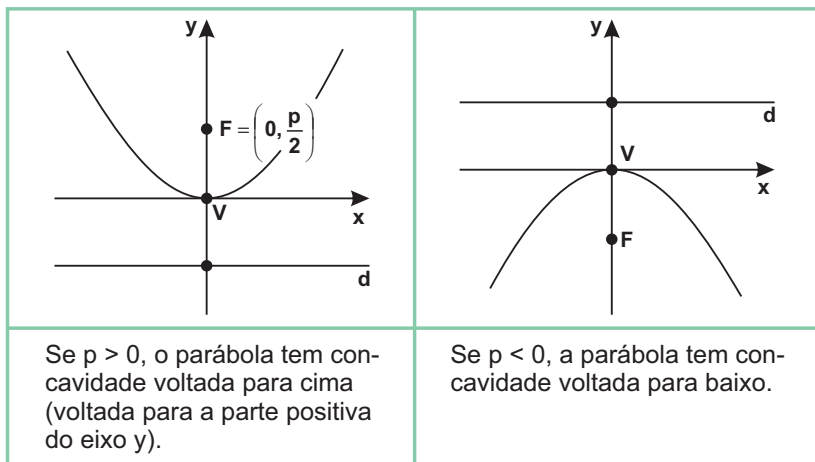
$$P' = \left(x, -\frac{p}{2}\right)$$

Por definição :

$$d(P, F) = d(P, P')$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2}$$

Efetuando: $x^2 = 2py$ que representa a equação canônica da parábola com vértice na origem e cujo eixo de simetria é o eixo y. Na equação $x^2 = 2py$, observe que:



4. IDENTIFICAÇÃO DA PARÁBOLA

a) Uma equação do tipo $Ax^2 + By = 0$ representa uma parábola de vértice na origem e eixo de simetria coincidente com o eixo y.

b) Similarmemente uma equação sob a forma $Ay^2 + Bx = 0$ representa uma parábola de vértice na origem e eixo de simetria coincidente com o eixo x.

N.B.: O eixo de simetria da parábola é homônimo à variável do 1.º grau. Por exemplo:

1) A equação $y^2 = -5x$ (ou $y^2 + 5x = 0$) representa uma parábola com eixo de simetria coincidente com o eixo x e concavidade voltada para a esquerda.

2) A equação $x^2 = \frac{3}{2}y$ (ou $2x^2 - 3y = 0$) denota uma parábola com eixo de simetria coincidente com o eixo y e concavidade voltada para cima.

Exercício Resolvido

"Gasta-se menos tempo fazendo a coisa certa, do que explicando por que a fizemos errado."

Henry W. Longfellow (1807-1882), poeta americano.

Dada a parábola de equação $y^2 = -8x$, pedem-se:

a) as coordenadas do foco;

RESOLUÇÃO:

Sendo x o eixo de simetria, então $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

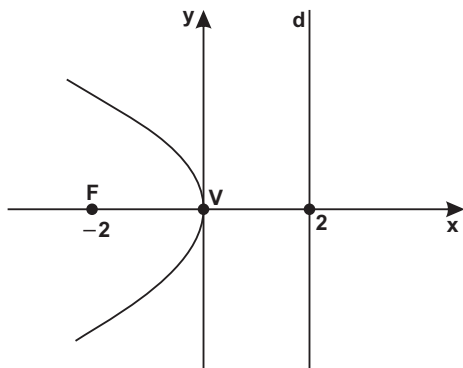
A equação $y^2 = -8x$ é da forma $y^2 = 2px$.

Comparando os coeficientes do 2.º membro:

$$2p = -8 \Rightarrow p = -4 \Rightarrow \frac{p}{2} = -2$$

Resp.: $F = (-2, 0)$

b) o gráfico:



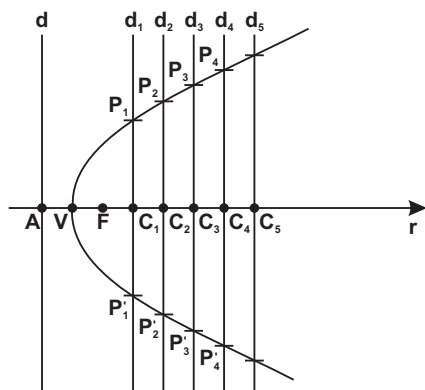
Equação da diretriz:
 $d: x - 2 = 0$

5. CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DA PARÁBOLA

(Leitura Complementar)

Vamos traçar a parábola da qual são dados o foco F e a diretriz d . Representemos o eixo de simetria r , que intercepta d em A , e o vértice V , que é o ponto médio de AF . Sobre o eixo e à direita de V marquemos os pontos $C_1, C_2, C_3, C_4 \dots$ e por tais pontos tracemos as paralelas $d_1, d_2, d_3, d_4 \dots$ à diretriz.

Utilizemos um compasso de:



1) abertura igual a $d(C_1, A)$ e centro em F determinemos sobre a paralela d_1 os pontos P_1 e P'_1 .

2) abertura igual a $d(C_2, A)$ e centro em F determinemos sobre a paralela d_2 os pontos P_2 e P'_2 .

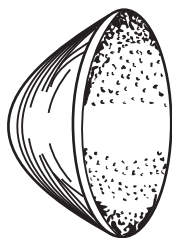
3) abertura igual a $d(C_3, A)$ e centro em F determinemos sobre a paralela d_3 os pontos P_3 e P'_3 .

Repete-se a operação para os pontos C_4, C_5 e obteremos tantos pontos da curva quanto quisermos.

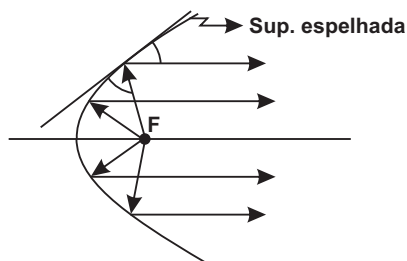
6. APLICAÇÕES PRÁTICAS DE PARÁBOLA

(Leitura Complementar)

a) A secção de um farol de automóvel tem o formato de uma parábola (a superfície espelhada é um parabolóide). A lâmpada situada no foco, quando acesa, emite raios luminosos que após incidirem sobre a parábola serão refletidos numa mesma direção segundo retas paralelas ao eixo da parábola.



Farol de um automóvel

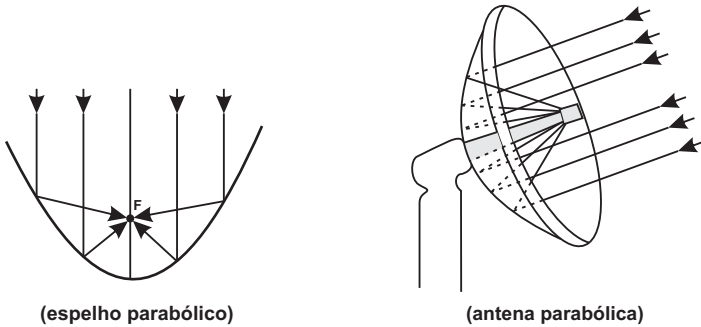


Secção de um farol

b) Se um espelho parabólico é apontado para o Sol, os raios de luz (paralelos ao eixo da parábola) serão refletidos para o mesmo ponto (foco). Pela grande quantidade de calor produzido nesta fonte, procede o nome foco (em latim *focus* significa fogo).

Aplica-se o mesmo princípio na construção de espelhos para

telescópios, antenas de radar e antenas parabólicas (as ondas paralelas ao eixo da parábola, se refletem na antena e confluem para o retransmissor).



(espelho parabólico)

(antena parabólica)

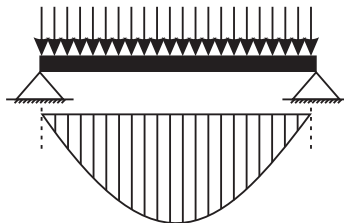
c) o cabo principal de uma ponte pênsil assumiria a forma de uma parábola (desde que o cabo fosse perfeitamente flexível), se se negligenciasse a sua massa e se o peso da ponte estivesse uniformemente distribuídos ao longo de seu comprimento.

Na prática, sabemos que tais condições não se verificam. Na verdade os cabos assumem a forma de uma curva muito próxima de uma parábola. Tal curva quando sujeita apenas ao próprio peso se chama CATENÁRIA.

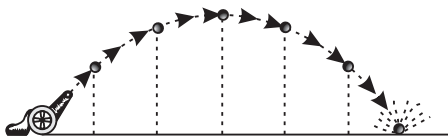
Um exemplo bem conhecido de ponte pênsil que tem o arco central com aparência de parábola é a ponte Hercílio Luz, que fica em Florianópolis/SC (cuja inauguração está prevista para dezembro de 2019, após mais de uma década de promessas). A catenária é constantemente confundida com uma parábola, mas existe clara diferença: a parábola é algébrica e sua equação é dada por uma função do 2.º grau; já a catenária é transcendente e sua equação é modelada a partir do cateto hiperbólico.



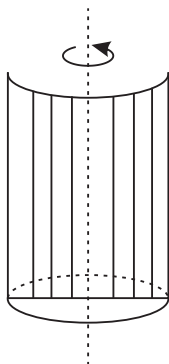
d) Em Resistência dos Materiais, o diagrama do Momento Fletor de uma viga submetida a uma carga uniforme é uma parábola.



e) Em balística, quando se lança um projétil sobre o qual atua somente a força da gravidade, a trajetória é uma parábola.



f)



Seja um recipiente cilíndrico parcialmente cheio de um certo líquido. Aplicando-se o movimento de rotação no eixo do cilindro, a secção (ou secção) da superfície livre é uma parábola.

Exercícios

É um grande erro não fazer nada, quando se pode fazer pouco.

01. Equação da parábola com foco em $F = (-2, 0)$ e com diretriz em $x = 2$.

Resp.: $y^2 = -8x$

02. Determinar a equação da parábola de concavidade voltada para cima, que passa pelo ponto $A = (1, 2)$ e cujo vértice é $V = (0, 0)$.

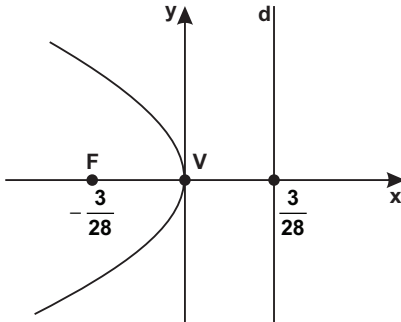
Resp.: $2x^2 - y = 0$

SUGESTÃO:

$$A = (1, 2) \in x^2 = 2py \Rightarrow (1)^2 = 2p(2) \Rightarrow p = \frac{1}{4}$$

$$\text{Então } x^2 = 2\left(\frac{1}{4}\right)y$$

03. Obter as coordenadas do foco e a equação da diretriz da parábola $7y^2 + 3x = 0$. Fazer o gráfico.



$$\text{Resp.: } F = \left(-\frac{3}{28}, 0\right)$$

$$d: 28x - 3 = 0$$

04. Calcular o valor de k para que a parábola $x = ky^2$ tenha foco no ponto $(3, 0)$.

$$\text{Resp.: } k = \frac{1}{12}$$

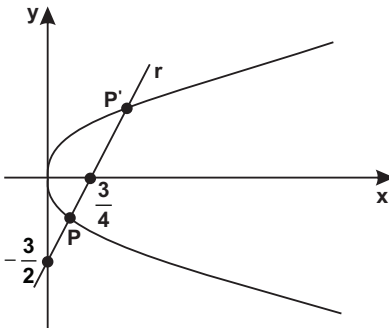
05. Achar a equação de uma parábola de vértice na origem, que passa pelo ponto $(-3, 2)$ e cujo eixo de simetria é o eixo x .

$$\text{Resp.: } 3y^2 + 4x = 0$$

06. Calcular os pontos de intersecção (ou interseção) da parábola $y^2 = 4x$ com a reta $r: 4x - 2y - 3 = 0$.

$$\text{Resp.: } P = \left(\frac{1}{4}, -1\right) \text{ e } P' = \left(\frac{9}{4}, 3\right)$$

SUGESTÃO:



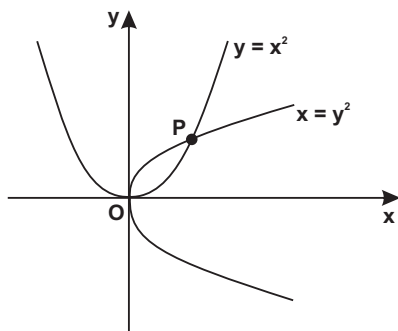
a) de r :

$$y = \frac{4x - 3}{2}$$

b) resolva o sistema:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = \frac{4x - 3}{2} \end{cases}$$

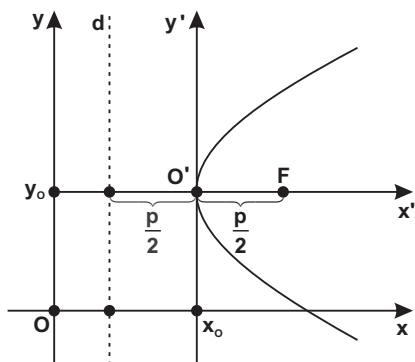
07. Obter os pontos de intersecção das parábolas abaixo representadas.



Resp.: $O = (0, 0)$
 $P = (1, 1)$

7. EQUAÇÕES DA PARÁBOLA DE $V \equiv O' = (x_0, y_0)$

a) O eixo de simetria é paralelo ao eixo x .



Através de uma translação de eixos, obtemos um novo sistema $x'O'y'$, cuja origem O' coincide com o vértice $V = (x_0, y_0)$.

Face o exposto, a equação da parábola referida ao novo sistema $x'O'y'$ é:

$$y'^2 = 2px' \quad (1)$$

Contudo, pelas fórmulas de translação:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - x_0 \\ y' &= y - y_0 \end{aligned} \right\} (2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \quad (1)$$

que representa a equação de uma parábola de $V = (x_0, y_0)$ e eixo de simetria paralelo ao eixo x . O parâmetro p será positivo ou negativo se, respectivamente a concavidade da parábola estiver voltada para a direita ou para a esquerda.

Ainda, desenvolvendo (I) e isolando a variável x :

$$x = \underbrace{\frac{1}{2p}}_a y^2 - \underbrace{\frac{y_0}{p}}_b y + \underbrace{\frac{y_0^2 + 2px_0}{2p}}_c \quad (I')$$

ou $x = ay^2 + by + c$ (I'')

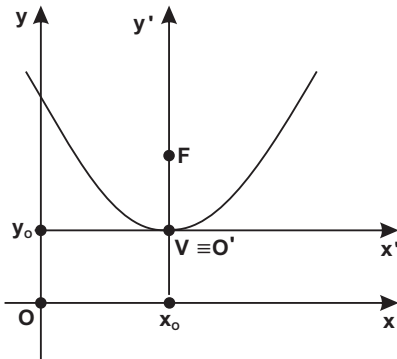
Comparando os coeficientes de (I') e (I''), observe:

$$a = \frac{1}{2p} \Rightarrow p = \frac{1}{2a}$$

$$b = -\frac{y_0}{p} \Rightarrow y_0 = -bp \Rightarrow y_0 = \frac{-b}{2a}$$

Esta última fórmula em destaque permite calcular a ordenada do vértice da parábola (y_0).

b) O eixo de simetria é paralelo ao eixo y .



Analogamente, *mutatis mutandis*, a parábola de concavidade voltada para cima (quando $p > 0$) ou concavidade voltada para baixo (quando $p < 0$) tem a forma:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \quad (II)$$

Outrossim, desenvolvendo (II) e isolando a variável y , temos:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (II')$$

Similarmente ao caso anterior, a comparação dos coeficientes de (II) e (II') permite concluir que:

$$p = \frac{1}{2a} \quad \text{e} \quad x_0 = \frac{-b}{2a}$$

N.B.: Fulcrados na comparação das equações, enfatize-se que o sinal do coeficiente **a** é o mesmo de **p**. Isto posto, a concavidade da parábola fica explicitada.

Por exemplo:

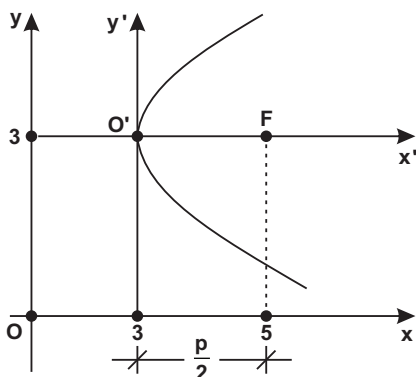
A parábola $x = -4y^2 + 3y + 1$ tem concavidade voltada para a esquerda pois o sinal de **a** é negativo.

Exercícios Resolvidos

"Quando um dedo aponta, três (dedos) contra."

Axioma Popular.

01. Obter a equação da parábola abaixo configurada.



RESOLUÇÃO:

A equação da parábola tem a forma: $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$

Na figura obtemos: $V = (3, 3)$ e $\frac{p}{2} = 2 \Rightarrow p = 4$

Resp.: $(y - 3)^2 = 8(x - 3)$ ou $y^2 - 6y - 8x + 33 = 0$

Obs.:

Equação da diretriz: $d: x - 1 = 0$

02. Esboçar o gráfico da parábola de equação $(x - 1)^2 = -12(y - 3)$.

RESOLUÇÃO:

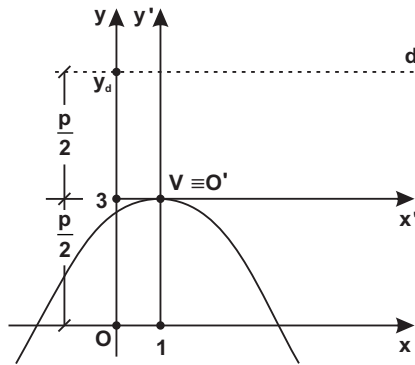
A equação é da forma $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$.

Sabemos à priori que a parábola tem:

- eixo de simetria paralelo ao eixo y (variável do 1.º grau);
 - concavidade voltada para baixo (pois o 2.º membro da equação dada é negativo);

- vértice do ponto $V = (x_0, y_0) = (1, 3)$.

Assim sendo, podemos representar a parábola a menos de seu foco e de sua diretriz.



a) Coordenadas do foco:

Comparando os coeficientes das duas equações:

$$|2p| = 12 \Rightarrow |p| = 6 \Rightarrow \left| \frac{p}{2} \right| = 3$$

$$x_F = x_0 = 1$$

$$y_F = y_0 - \left| \frac{p}{2} \right| = 3 - |3| = 0$$

$$F = (1, 0)$$

b) Equação da diretriz:

$$y_d = y_0 + \left| \frac{p}{2} \right| = 3 + |3| = 6$$

$$d: y - 6 = 0$$

03. Obter as coordenadas do vértice e do foco da parábola $y = -2x^2 + 8x - 8$.

RESOLUÇÃO:

a) Vértice:

$$x_v = x_o = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2(-2)} = 2$$

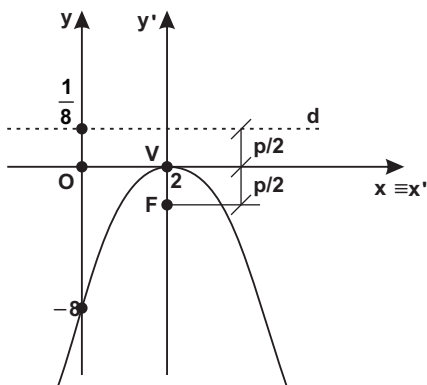
Substituindo a variável x por 2 na equação dada obtém-se y_v :

$$y_v = y_o = -2(2)^2 + 8(2) - 8 = 0$$

Resp.: $V = (2, 0)$

b) Foco:

$$p = \left| \frac{1}{2a} \right| = \left| \frac{1}{2(-2)} \right| = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{1}{8}$$



Coordenadas do foco :

$$y_F = y_v - \left| \frac{p}{2} \right| = -\frac{1}{8}$$

$$x_F = x_v = 2$$

$$F = \left(2, -\frac{1}{8} \right)$$

$$\text{Equação da diretriz} \Rightarrow d: y = \frac{1}{8} \text{ ou } 8y - 1 = 0$$

A função $y = -2x^2 + 8x - 8$ tem $a = -2 < 0$, o que indica uma parábola de concavidade voltada para baixo e cujo eixo de simetria é

paralelo ao eixo y . Ademais, a parábola intercepta o eixo y no ponto de ordenada -8 (termo independente da parábola) e corta o eixo x no ponto de abscissa 2 (raízes $x_1 = x_2$ da eq. $-2x^2 + 8x - 8 = 0$).

Obs.:

Há outros processos para a resolução do exercício em pauta. Um desses processos utiliza a teoria da translação de eixos. Vejamos: A equação dada pode ser escrita:

$$2x^2 - 8x + y + 8 = 0 \quad \textcircled{1}$$

a) Fórmulas de translação :

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

b) Substituindo $\textcircled{2}$ em $\textcircled{1}$:

$$2(x_0 + x')^2 - 8(x_0 + x') + (y_0 + y') + 8 = 0 \quad \textcircled{3}$$

* fazendo a soma dos coeficientes de $x' = 0$

$$4x_0 - 8 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$$

* fazendo o termo independente = 0

$$2x_0^2 - 8x_0 + y_0 + 8 = 0$$

para $x_0 = 2$ obtém - se $y_0 = 0$.

$$\text{Então } V = (2, 0)$$

c) Levando o $V = (2, 0)$ em $\textcircled{3}$ obtemos :

$$x'^2 = -\frac{1}{2}y'$$

que representa a equação canônica de uma parábola em que

$$2p = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{p}{2} \Rightarrow -\frac{1}{8}$$

Verifique ainda que o gráfico da parábola coincide com o da última figura.

Exercícios

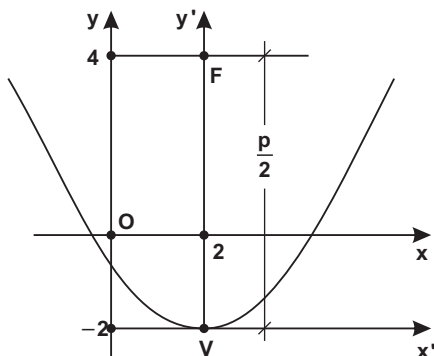
**"Se há um agravo pungente a perdoar, é hora.
O mais profundo rancor não resiste a um apelo de braços abertos."**

Helena Kolody, poeta e escritora paranaense.

01. Uma parábola tem foco em $F = (2, 4)$ e vértice em $V = (2, -2)$.
Determinar a sua equação.

Resp.: $(x - 2)^2 = 24(y + 2)$

SUGESTÃO:



a) a equação é da forma :

$$(x - 2)^2 = 2p(y + 2)$$

b) mas $\left| \frac{p}{2} \right| = 6 \Rightarrow |p| = 12$

02. Equação da parábola com vértice em $(1, 3)$ e foco em $(1, 2)$.

Resp.: $(x - 1)^2 = -4(y - 3)$

03. Equação da parábola com foco em $F = (1, 3)$ e diretriz de equação $y = -1$.

Resp.: $(x - 1)^2 = 8(y - 1)$

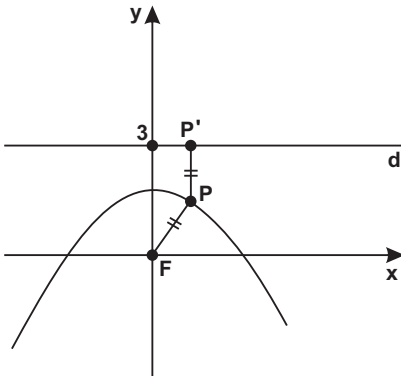
04. Calcular o vértice, o foco e a diretriz da parábola
 $(x - 2)^2 - 4(y - 8)$.

Resp.: $V = (2, 8); F = (2, 7);$
 $d: y - 9 = 0$

05. Qual a equação do conjunto de pontos $P = (x, y)$ que são equidistantes da reta $y = 3$ e do ponto $F = (0, 0)$?

Resp.: $x^2 + 6y - 9 = 0$

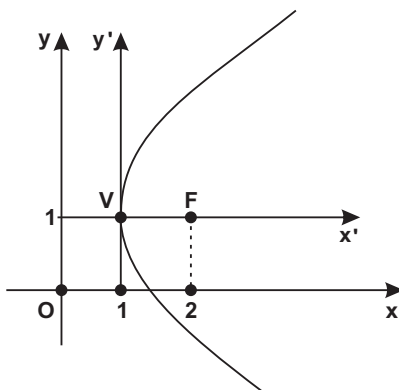
SUGESTÃO:



$$\begin{aligned} P &= (x, y) \\ P' &= (x, 3) \\ F &= (0, 0) \end{aligned}$$

Pelo enunciado:
 $d(P, P') = d(P, F)$

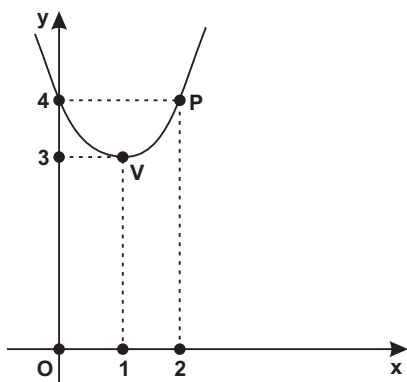
06. Determinar a equação da parábola abaixo representada e a equação de sua diretriz.



Resp.: $(y - 1)^2 = 4(x - 1)$
d: $x = 0$

07. Obter a equação da parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo y , vértice em $(1, 3)$ e que passa pelo ponto $(2, 4)$.

Resp.: $x^2 - 2x - y + 4 = 0$



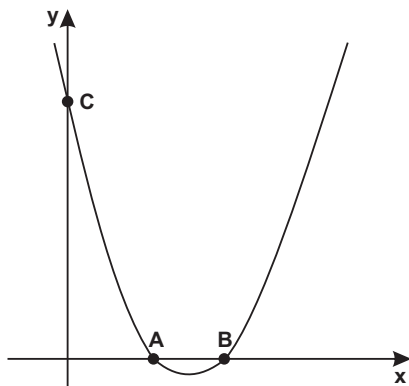
SUGESTÃO:

a) Equação da parábola: $(x - 1)^2 = 2p(y - 3)$

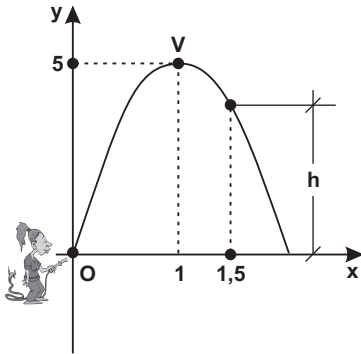
b) $P = (2, 4) \in$ à parábola: $(2 - 1)^2 = 2p(4 - 3) \Rightarrow |p| = \frac{1}{2}$

08. A parábola abaixo configurada tem equação $x^2 - 5x - y + 6 = 0$. Achar as coordenadas dos pontos A, B e C.

Resp.: $A = (2, 0)$
 $B = (3, 0)$
 $C = (0, 6)$



09. Um esguicho (posicionado na origem) lança água e esta descreve uma parábola de $V = (1, 5)$. Calcular a altura (h) do filete de água, a uma distância 1,5 m da origem, sobre uma horizontal Ox .



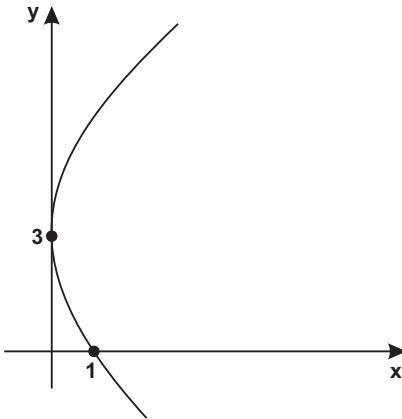
Resp.: 3,75 m

Série B

Deus nunca nos dá tudo. Mas também não nos priva de tudo.

10. Determinar a equação da parábola que se vê na figura abaixo.

Resp.: $x = \frac{1}{9}y^2 - \frac{2}{3}y + 1$



SUGESTÃO:

a) Equação da parábola:

$$x = ay^2 + by + c$$

b) $c = 1$

c) $(0, 3) \in$ a parábola:

$$0 = 9a + 3b + 1 \quad \textcircled{1}$$

d) $V = (0, 3)$

$$y_V = \frac{-b}{2a} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = -6a \quad \textcircled{2}$$

e) Resolvendo $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$:

$$a = \frac{1}{9} \text{ e } b = -\frac{2}{3}$$

11. A parábola $y = x^2 + bx + c$ passa pelo ponto $P = (1, 3)$ e a abscissa do foco é igual a 2. Calcular c .

Resp.: $c = 6$

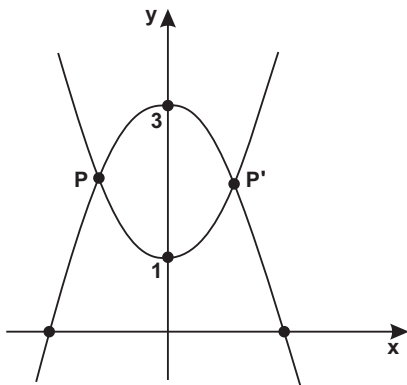
12. Equação da parábola com eixo de simetria vertical, cujo vértice é $V = (3, 1)$ e que intercepta o eixo das abscissas nos pontos $(2, 0)$ e $(4, 0)$.

Resp.: $x^2 - 6x + y + 8 = 0$

13. A parábola representada pela função $y = ax^2 + bx + c$ passa pelos pontos $(0, -3)$; $(-3, 0)$ e $(2, 5)$. Obter a equação da parábola.

Resp.: $y = x^2 + 2x - 3$

14. Obtenha os pontos de intersecção das parábolas $y = x^2 + 1$ e $y = -x^2 + 3$. Ademais, calcule os vértices e as intersecções de cada parábola com os eixos cartesianos.



Resp.: $P = (-1, 2)$ e $P' = (1, 2)$

SUGESTÃO:

1.^a parábola:

$V = (0, 1)$; intercepta o eixo y no ponto $(0, 1)$ e não intercepta o eixo x .

2.^a parábola:

$V = (0, 3)$; intercepta o eixo y em $(0, 3)$; intercepta o eixo x nos pontos $(\sqrt{3}, 0)$ e $(-\sqrt{3}, 0)$.

15. Obter o vértice e o foco da parábola $y^2 - 6y - 12x - 15 = 0$.

Resp.: $V = (-2, 3)$ e $F = (1, 3)$

SUGESTÃO:

a) Inicialmente isole a variável x :

$$x = \frac{1}{12}y^2 - \frac{1}{2}y - \frac{15}{12}$$

b) Calcule a ordenada do vértice:

$$y_v = \frac{-b}{2a}$$

16. Idem para: a) $y = 9x - \frac{3}{4}x^2$ e b) $x^2 - 8x - 6y + 14 = 0$

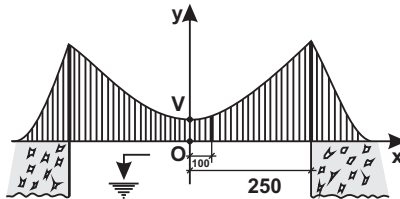
Resp.: a) $V = (6, 27)$ e $F = \left(6, \frac{80}{3}\right)$

b) $V = \left(4, -\frac{1}{3}\right)$ e $F = \left(4, \frac{7}{6}\right)$

17. Encontrar as coordenadas do foco e a equação da diretriz da parábola $x^2 + 6x - 12y + 57 = 0$.

Resp.: $F = (-3, 7)$ e $d: y - 1 = 0$

18. Os cabos de um lado de uma ponte pênsil com carga uniformemente distribuídas tomam a forma aproximada de um arco de parábola. As torres de suporte dos cabos tem 65 m de altura e o intervalo entre as torres é de 500 m. O ponto mais baixo fica a 15 m do nível da estrada.



Achar a equação da parábola considerando o sistema cartesiano sito conforme a figura. Calcular o comprimento (ℓ) de um fio de sustentação situado a 100 m do centro da ponte.

Resp.: $x^2 - 1250y + 18750 = 0$ e
 $\ell = 23$ m

SUGESTÃO:

a) $V = (0, 15)$

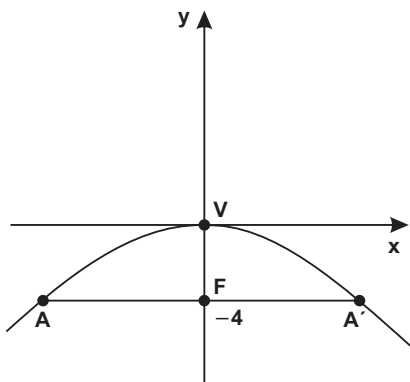
b) Equação da parábola: $(x - 0)^2 = 2p(y - 15)$

c) $P = (250, 65) \in$ parábola $\Rightarrow |p| = 625$.

19. Determinar o comprimento de latus rectum da parábola $x^2 = -16y$.

Resp.: 16

SUGESTÃO:



Obs.:

Demonstra-se que o comprimento da latus rectum de $y^2 = 2px$ ou $x^2 = 2py$ é $2p$.

a) A parábola tem foco em $F = (0, -4)$ e a latus rectum tem equação $y = -4$.

b) Levando $y = -4$ na equação da parábola $x^2 = -16(-4) \Rightarrow x = \pm 8$. $A = (-8, -4)$ e $A' = (8, -4)$.

c) Comprimento da latus rectum:
 $d(A, A') = 16$

20. Determinar as coordenadas das extremidades da latus rectum da parábola cuja diretriz é a reta $y - 3 = 0$ e cujo foco é o ponto $F = (1, 1)$.

Resp.: $P = (3, 1)$ e $P' = (-1, 1)$

21. O diâmetro de uma circunferência tem extremidades nas extremidades da latus rectum da parábola $y^2 - 8y - 8x + 32 = 0$. Pede-se a equação da circunferência.

Resp.: $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$

22. (ZÓZIMO GONÇALVES) Deduzir a equação da parábola de eixo vertical cujo foco é o ponto $F = (-1, 3)$ e que passa pelo ponto $P = (3, 6)$.

Resp.: $(x + 1)^2 = 4(y - 2)$ e
 $(x + 1)^2 = -16(y - 7)$

8. EQUAÇÃO DA PARÁBOLA DE $V \equiv O' = (x_0, y_0)$ E CUJO EIXO DE SIMETRIA NÃO É PARALELO A UM DOS EIXOS COORDENADOS

A existência do termo em xy numa equação do 2.º grau indica que o eixo de simetria (se for parábola) é oblíquo aos eixos coordenados. Rememoremos o primeiro capítulo: quando se pretende eliminar termos do 2.º grau, utiliza-se a rotação; do primeiro grau, a translação.

O exercício abaixo ilustra.

Exercício:

Obter a equação canônica e traçar o gráfico da parábola $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 34x - 38y + 51 = 0$

RESOLUÇÃO:

a) Ordem das transformações :

$$B^2 - 4AC = (-24)^2 - 4(9)(16) = 0 \quad \begin{cases} 1) \text{ rotação} \\ 2) \text{ translação} \end{cases}$$

b) Rotação :

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{-24}{9 - 16} = \frac{24}{7}$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{24}{7} \Rightarrow 12 \operatorname{tg}^2 \theta + 7 \operatorname{tg} \theta - 12 = 0$$

$$\text{Raízes : } \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{3}{4} \text{ e } \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{-4}{3}$$

$$\text{Para } \operatorname{tg} \theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos \theta = \frac{4}{5} \text{ e } \operatorname{sen} \theta = \frac{3}{5}$$

$$(\theta \cong 36^\circ)$$

Fórmulas de rotação :

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta = \frac{4x' - 3y'}{5} \\ y &= x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta = \frac{3x' + 4y'}{5} \end{aligned} \right\} \textcircled{1}$$

Substituindo $\textcircled{1}$ na equação dada e efetuando-se pacientemente os cálculos decorrentes, obtêm-se:

$$25y'^2 - 50x' - 10y' + 51 = 0 \quad \textcircled{2}$$

c) Translação: como se busca a equação canônica de uma parábola, na equação acima deve-se eliminar o termo em y' e o termo independente.

$$\left. \begin{aligned} \text{Fórmulas de translação: } & x' = x_0 + x'' \\ & y' = y_0 + y'' \end{aligned} \right\} \textcircled{3}$$

Levando $\textcircled{3}$ em $\textcircled{2}$ vem:

$$25(y_0 + y'')^2 - 50(x_0 + x'') - 10(y_0 + y'') + 51 = 0 \quad \text{ou}$$

$$25y''^2 - 50x'' + (50y_0 - 10)y'' + 25y_0 - 50x_0 - 10y_0 + 51 = 0 \quad \textcircled{4}$$

* fazendo o coeficiente de $y'' = 0$

$$50y_0 - 10 = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{5} \quad (\text{sobre o eixo } y')$$

* fazendo o termo independente = 0

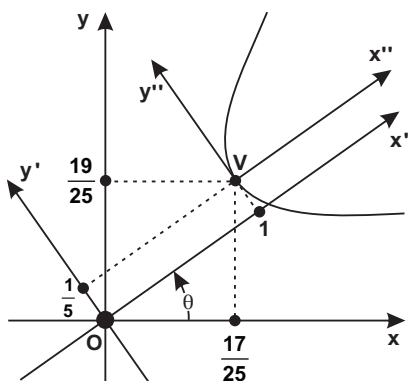
$$25y_0^2 - 50x_0 - 10y_0 + 51 = 0$$

$$\text{Para } y_0 = \frac{1}{5} \Rightarrow x_0 = 1 \quad (\text{sobre o eixo } x')$$

$$\text{Então } V = \left(1, \frac{1}{5} \right) \quad (\text{no sistema } x'Oy')$$

d) Levando $V = \left(1, \frac{1}{5} \right)$ em $\textcircled{4}$ obtém-se a equação canônica da parábola: $y''^2 = 2x''$

e) Gráfico:



Registre-se que a parábola não corta os eixos x e y : fazendo $x = 0$ na equação dada obtém-se $9x^2 - 34x + 51 = 0$. Esta equação possui discriminante negativo, e ipso facto é desprovida de raízes.

Analogamente, se se fizer $y = 0$ na equação dada, a equação $16y^2 - 38y + 51 = 0$ não possui raízes.

Obs.:

Cálculo das coordenadas do vértice V em relação ao sistema xOy :

Fórmulas de rotação:

$$x = \frac{4x' - 3y'}{5} = \frac{4(1) - 3\left(\frac{1}{5}\right)}{5} = \frac{17}{25}$$

$$y = \frac{3x' + 4y'}{5} = \frac{3(1) + 4\left(\frac{1}{5}\right)}{5} = \frac{19}{25}$$

$$\text{Então: } V = \left(\frac{17}{25}, \frac{19}{25}\right)$$

Exercícios

"O importante não é o que fizeram de nós, mas o que fizemos do que fizeram de nós."

Jean Paul Sartre (1905-1980), escritor e filósofo francês

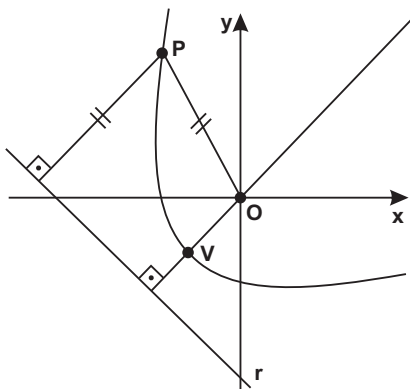
01. Obter a equação canônica da parábola $x^2 - 2xy + y^2 - 8x + 16 = 0$

$$\text{Resp.: } y''^2 - 2\sqrt{2}x'' = 0$$

02. Uma parábola tem o foco na origem e diretriz a reta $r: 2x + 3y + 5 = 0$. Ache a sua equação.

$$\text{Resp.: } 9x^2 + 4y^2 - 12xy - 20x - 30y - 25 = 0$$

SUGESTÃO:



Seja $P = (x, y)$ um ponto genérico da parábola.

$$d(P, O) = d(P, r)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2x + 3y + 5}{\sqrt{13}}$$

03. Equação da parábola cujo foco é $F = (0, 1)$ e cuja diretriz é a reta $2x - y = 0$.

$$\text{Resp.: } x^2 + 4y^2 + 4xy - 10y + 5 = 0$$

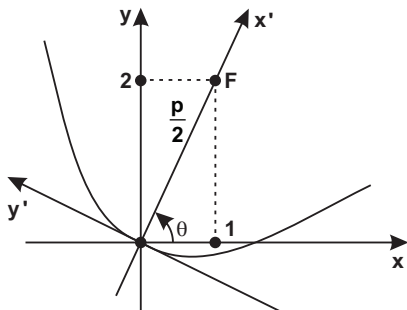
04. Numa parábola tem-se o $V = (6, -3)$ e a diretriz $3x - 5y + 1 = 0$. Pede-se a sua equação.

$$\text{Resp.: } 25x^2 + 9y^2 - 30xy - 414x + 214y + 1529 = 0$$

05. Obter a equação da parábola sabendo-se que o foco é $F = (1, 2)$ e o vértice coincide com a origem.

$$\text{Resp.: } 4x^2 + 4xy + y^2 - 20x + 40y = 0$$

SUGESTÃO:



a) Da figura:

$$\frac{p}{2} = \sqrt{5} \Rightarrow p = 2\sqrt{5}$$

$$\text{sen } \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ e}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

b) A equação da parábola em relação ao sistema $x'Oy'$ é: $y'^2 = 2px'$ ①

c) Fórmulas de rotação :

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \theta - y \sin \theta = \frac{x - 2y}{\sqrt{5}} \\ y' &= x \sin \theta + y \cos \theta = \frac{2x + y}{\sqrt{5}} \end{aligned} \right\} \textcircled{2}$$

d) Substituindo ② em ① tem-se a resposta.

06. Calcular a equação da parábola de vértice no ponto $(2, 2)$, que passa pelo ponto $P = (4, 1)$ e cujo eixo focal está sobre a reta $y = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x$.

$$\text{Resp: } 9x^2 + 16y^2 - 24xy - 68x - 76y + 284 = 0$$

SUGESTÃO:

Vide exercício precedente.

AOS MESTRES

Mais do que o conhecimento, o que faz o verdadeiro mestre é a dedicação.

Aos que, possuindo sabedoria, transmitiram-na com amor, o nosso preito de imorredoura gratidão.

Aos que souberam suprir as limitações, doando-se por inteiro, nosso perene reconhecimento.

Aos que simplesmente nos passaram conhecimento: muito obrigado.

E aos que, carecendo de luzes, foram incapazes de se doar, que não sejam julgados, mas compreendidos.

Johann W. Goethe (1749-1832), o maior poeta alemão.

TRANSFORMAÇÕES DISRUPTIVAS PARA UM AMBIENTE UNIVERSITÁRIO INOVADOR

Há 10 anos chegaram a nossas mãos os primeiros smartphones, sem os quais hoje temos a sensação de orfandade e, há menos de 5 anos, sutilmente eclodiram ao grande público as tão enlevadas tecnologias dos dias atuais, como a inteligência artificial (AI), internet das coisas (IoT), big data, machine learning...

Essa é a base para afirmarmos que, daqui em frente, do universitário mais e mais se exigirá “fluência digital”, uma vez que a aprendizagem será preponderantemente em ambiente virtual. Requerer-se-á dele disciplina na autogestão do seu tempo para aprender por conta própria, raciocínio lógico e disposição para interagir com conteúdos multidisciplinares em trabalhos em equipe.

Na academia, grandes mudanças se efetivarão, abolindo-se o atual regime serido com disciplinas herméticas e fragmentadas. As universidades necessitarão de menos espaço físico, pois, em um ecossistema de inovação e ambientes virtuais mais didáticos que nos dias atuais, os estudantes terão um aprendizado mais eficaz da parte teórica em um quarto silente de sua casa e irão ao câmpus para experiências em laboratório, práticas nas clínicas ou para encontros focados em projetos e problemas com conteúdos assaz diversificados.

A maioria esmagadora das universidades brasileiras, todavia, padece de um grande e conhecido infortúnio: encasteladas em torre de marfim, pouco interagem com a indústria e com a sua comunidade. E o que se vislumbra para o futuro – e há modelos já bem-sucedidos como as de Stanford, Olin College e MIT – é uma analogia de triplice hélice, cada uma constituindo um instrumento de propulsão para fomentar inovação e resolução de problemas: universidades, indústrias e governos. Cabe às universidades o mais importante papel: pesquisa, ensino e desenvolvimento de conceitos, tecnologias e soluções. As indústrias, o papel de provedoras de laboratórios práticos e demandadoras de projetos customizados. Aos governantes, conceder incentivos para viabilizar que o entorno da academia seja um ambiente que fomente o empreendedorismo, abrigando startups e incubadoras.

Ademais, tornar-se globalizada certamente deve ser o escopo de nossas universidades, enviando e recebendo acadêmicos, seja pelo intercâmbio de pesquisas, conhecimentos e culturas diferentes, seja assimilando e incorporando boas práticas de gestão e ensino. Sempre afirmei em sala de aula: o futuro concorrente do aluno não será apenas o profissional formado nas instituições de ensino superior do Brasil, mas também naquelas sediadas na China, Japão, Coreia, Vale do Silício. Estamos todos conectados – a “aldeia global” do filósofo canadense Marshal McLuhan. A vivência por seis meses ou mais em outro país deixa uma marca indelével para toda uma vida e propicia elevado amadurecimento e desenvolvimento pessoal.

E o professor? Esse será mais do que nunca exaltado, porém não mais como um expositor de conteúdos, mas transfigurado em mediador, mentor, especialista, motivador. Nos encontros dentro das instituições de ensino, haverá ênfase para que o discente desenvolva as habilidades socioemocionais, estas cada vez mais valorizadas na convivência profissional, familiar, nas relações humanas e com o meio ambiente.

A academia deve ser um hub da inovação e também espaço da pluralidade. Todavia, atingir esse desejado patamar exige um esforço da sociedade, dos governos e da academia, vencendo a inércia do status quo, as resistências de parte dos docentes e discentes, bem como os preconceitos mútuos existentes na integração entre academia e empresas. As instituições que conseguem esse feito demonstram indubitavelmente os expressivos efeitos sobre o ensino-aprendizagem, sobre a economia e sobre a sociedade em que estão inseridas. Um desafio que merece e deve ser enfrentado.

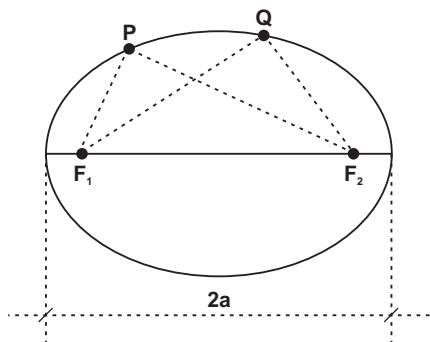
Do autor.

A Elipse

1. DEFINIÇÃO

É o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos) do mesmo plano, é uma constante ($2a$), onde $2a > d(F_1, F_2)$

Assim:



$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

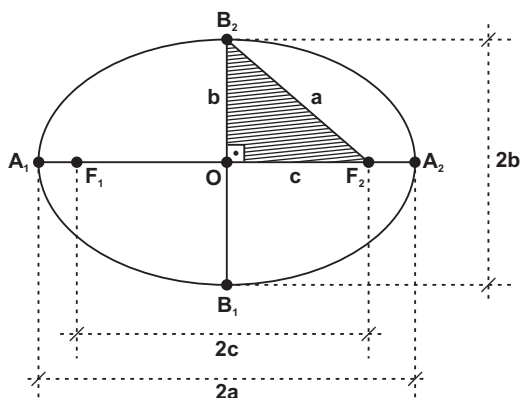
$$e$$

$$d(Q, F_1) + d(Q, F_2) = 2a$$

Obs.:

Na pág. 230 você tem a etimologia da palavra **elipse**.

2. ELEMENTOS DA ELIPSE



F_1, F_2 : focos. A distância entre os focos F_1 e F_2 , igual a $2c$, denomina-se **distância focal**.

O: centro da elipse; é o ponto médio do segmento F_1F_2 .

A_1, A_2, B_1, B_2 : vértices da elipse.

Eixo maior: é o segmento A_1A_2 e cujo comprimento é $2a$.

Eixo menor: é segmento B_1B_2 e cujo comprimento é $2b$.

Do triângulo retângulo B_2OF_2 hachurado na figura, obtemos a relação notável:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

N.B.: A rigor há um abuso de linguagem ao denominar-se de "eixo maior" o segmento A_1A_2 , e de "eixo menor" o segmento B_1B_2 .

3. EXCENTRICIDADE

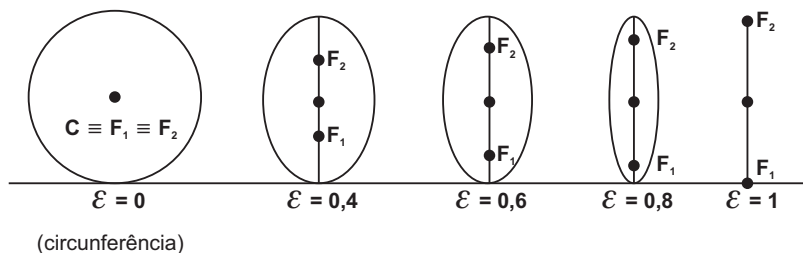
Uma importante característica da elipse é a sua excentricidade, que é definida pela relação:

$$\mathcal{E} = \frac{c}{a} \quad (0 < \mathcal{E} < 1, \text{ sendo } \mathcal{E} \text{ a letra grega épsilon})$$

Como a e c são positivos e $c < a$, depreende-se que $0 < \mathcal{E} < 1$.

Quanto mais próximo de zero for o valor de \mathcal{E} , mais a elipse se aproxima de uma circunferência. Por outro lado, quanto mais achatada for a elipse, mais o valor de \mathcal{E} se aproxima de 1.

Uma vez fixo o valor de a , há uma correspondência entre o valor de \mathcal{E} e a distância focal: quanto mais a elipse se aproxima de uma circunferência, menor a distância entre os focos; e quanto mais achatada for a elipse, maior a distância entre os focos.



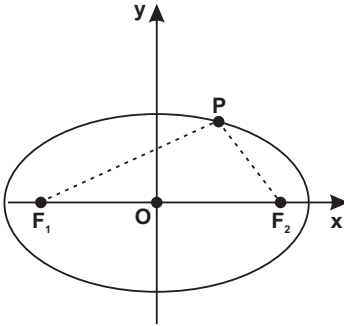
É fácil concluir quanto aos valores extremos do domínio de \mathcal{E} :

Se $\mathcal{E} = 0$ tem-se uma circunferência de diâmetro $2a$ e os focos F_1 e F_2 coincidem com o centro da circunferência.

Se $\mathcal{E} = 1$ tem-se segmento retilíneo F_1F_2 .

4. EQUAÇÃO CANÔNICA DA ELIPSE DE CENTRO NA ORIGEM

a) O eixo maior coincide com o eixo x.



Sejam:

$P = (x, y)$ um ponto genérico da elipse.

$F_1 = (-c, 0)$

$F_2 = (c, 0)$

Por definição:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

Transpondo o 2.º radical ao 2.º membro :

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ao quadrado e desenvolvendo os produtos notáveis:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

Isolando o radical:

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

Dividindo por 4 e tornando a quadrar:

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$\text{ou } (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Mas pela relação notável $a^2 - c^2 = b^2$:

$$b^2x^2 + c^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo ambos os membros por a^2b^2 :

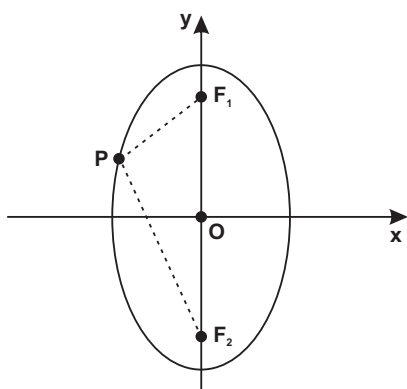
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{eixo maior } \equiv \text{ eixo x})$$

que é chamada equação **canônica** ou **reduzida** da elipse de centro na origem e focos sobre o eixo x.

Obs.:

Está consagrado o uso da expressão: "o eixo maior coincide com o eixo x", mas, que numa linguagem mais precisa usar-se-ia: "o eixo maior pertence ao eixo x".

b) O eixo maior coincide com o eixo y.



Na figura tem-se:
 $F_1 = (0, c)$ e $F_2 = (0, -c)$

De forma análoga demonstra-se que para um ponto $P = (x, y)$ pertencente à elipse tem-se a equação canônica:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

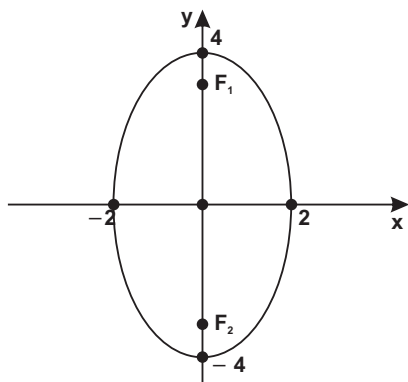
(eixo maior \equiv eixo y)

Aqui cabe um destaque: na equação canônica a é a medida do semi-eixo maior e a^2 representa o maior dos denominadores. Se o número a^2 é denominador de:

– x^2 então os focos estão sobre o eixo x;

– y^2 então os focos estão sobre o eixo y.

Exemplifiquemos: A equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ representa uma elipse na qual $a^2 = 16$; portanto a medida do seu eixo maior é $2a = 2\sqrt{16} = 8$ e o eixo maior coincide como o eixo y.



Depreende-se ainda, da equação, que $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$.
 Coordenadas dos focos :

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = 2\sqrt{3}.$$

Então :

$$F_1 = (0, 2\sqrt{3}) \text{ e } F_2 = (0, -2\sqrt{3})$$

5. IDENTIFICAÇÃO DA ELIPSE

Uma equação do tipo $Ax^2 + By^2 = F$ representa uma elipse com centro na origem e eixos paralelos aos eixos cartesianos se:

A e B concordam em sinal;
 $A \neq B$.

Ademais, a elipse pode ser:

a) **real**: se A, B e F concordam em sinal.

$$\text{Ex.: } 2x^2 + 3y^2 = 1$$

b) **imaginária** (não há lugar geométrico ou é um conjunto vazio): se F tem sinal contrário ao de A e B.

$$\text{Ex.: } 2x^2 + 3y^2 = -1$$

c) **puntiforme** (a elipse se reduz a um ponto em O): se $F = 0$.

$$\text{Ex.: } 2x^2 + 3y^2 = 0$$

Exemplos Resolvidos

"Os anos deixam rugas na pele, mas a falta de entusiasmo deixa rugas na alma."

Michael Lynberg

01. Dada a equação da elipse $16x^2 + 9y^2 = 144$, pede-se:

1. a) a equação canônica;

Dividindo cada termo da equação dada por 144:

$$\frac{16x^2}{144} + \frac{9y^2}{144} = \frac{144}{144} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (\text{eq. canônica})$$

1. b) a excentricidade (\mathcal{E});

Da equação canônica:

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \quad b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

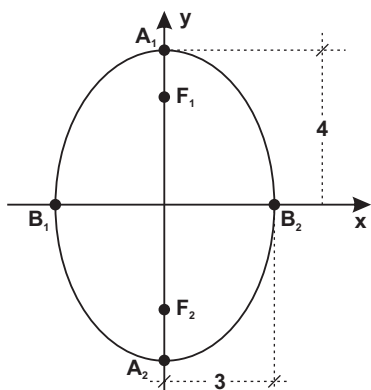
$$\text{Ademais } c^2 = a^2 - b^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$\text{Resp.: } \mathcal{E} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

1. c) o gráfico, as coordenadas dos focos e dos vértices.

Como $a^2 = 16$ é o denominador de y , isto indica que o

eixo maior está sobre o eixo das ordenadas. Para construir o gráfico temos:



$$a = 4; b = 3; c = \sqrt{7}.$$

Coordenadas dos focos:

$$F_1 = (0, \sqrt{7}) \text{ e } F_2 = (0, -\sqrt{7})$$

Coordenadas dos vértices:

$$A_1 = (0, 4) \text{ e } A_2 = (0, -4)$$

$$B_1 = (-3, 0) \text{ e } B_2 = (3, 0)$$

Importante: represente a equação dada no aplicativo Geogebra. É uma ferramenta útil e prática. Acesse em:

www.geogebra.org/graphing

02. Obter a equação da elipse com centro na origem do sistema cartesiano, eixo focal coincidente com o eixo x , que passa pelo ponto $P = (1, 1)$ e cuja excentricidade é igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

RESOLUÇÃO:

$$2.a) \mathcal{E} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{2} a}{2}$$

$$2.b) \text{ Mas } b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - \left(\frac{\sqrt{2} a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

$$2.c) \text{ Equação canônica: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \textcircled{1}$$

2.d) Como $a^2 = 2b^2$ e $P = (1, 1) \in \textcircled{1}$:

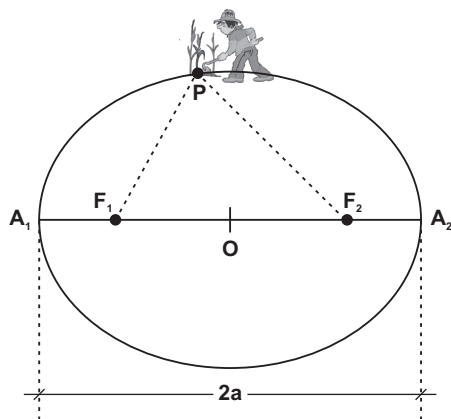
$$\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow a^2 = 3$$

$$\text{Resp.: } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{\frac{3}{2}} = 1 \text{ ou } x^2 + 2y^2 = 3$$

6. CONSTRUÇÃO DE UMA ELIPSE

(Leitura Complementar)

Discorramos sobre o chamado método do "carpinteiro" ou método do "jardineiro" (para dar forma aos canteiros).



Sobre uma tábua crava-se dois pregos e fixa-se os extremos de um barbante, de comprimento $2a$, nos dois pregos (focos). Estira-se o barbante com um lápis e se move este último até uma volta completa, sempre com o barbante tenso. A figura ajuda o entendimento e observe que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$.

7. APLICAÇÕES PRÁTICAS DA ELIPSE

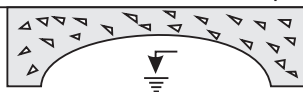
(Leitura Complementar)

a) Em 1609, o matemático e astrônomo alemão Johannes Kepler publicou *Astronomia Nova*, no qual apresenta as três leis do movimentos dos planetas. Conhecida como a 1.ª lei de Kepler, assim se enuncia: "os planetas descrevem órbitas elípticas, com o Sol em um dos focos". A propósito, a palavra foco é devida a Kepler e provém da forma latinizada de focus, cuja acepção é fogo.

Sendo o periélio a maior proximidade com a Terra e o afélio a maior distância, é fácil entender que o periélio ocorre no verão, sendo que em 2018 se deu em 3 de janeiro no hemisfério sul, que foi o dia em que a Terra esteve mais próxima do Sol, ou seja, a 147,1 milhões de km (do grego peri: próximo e hélio: Sol). O afélio ocorreu, em 2018, no dia 4 de julho, ou seja, o dia de maior distância, igual a 152,1 milhões de km.

Ademais, no globo terrestre (geóide) o equador tem aproximadamente a forma de uma circunferência e o meridiano de uma elipse.

b) Arcos em forma de semi-elipse são muito empregados na construção de pontes de concreto e de pedras (desde os antigos romanos).

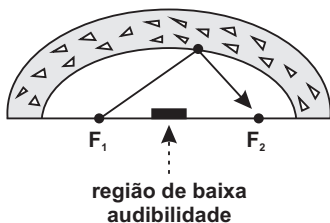


c) Engenharia Civil: em Resistência dos Materiais é muito empregada a elipse de inércia.

Engenharia Elétrica: conjuntos de elipses homofocais (elipses de mesmo foco) são utilizadas na teoria de correntes elétricas estacionárias.

Engenharia Mecânica: são usadas engrenagens elípticas (excêntricas).

d) Sob uma abóbada elíptica os sons emitidos em um foco têm melhor audibilidade nos pontos próximos ao outro foco, não obstante serem praticamente inaudíveis na região intermediária aos dois focos.



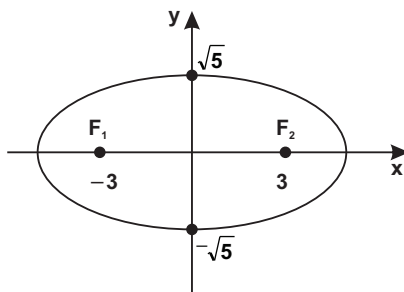
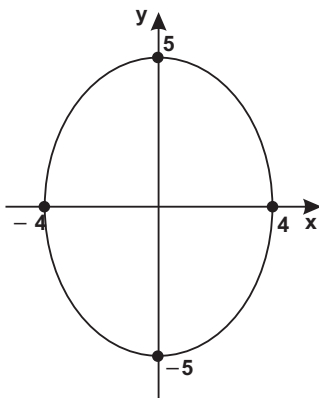
e) O mais portentoso monumento arquitetônico de Roma antiga foi o Coliseu. A planta baixa possuía a forma elíptica, cujo eixo maior tinha 188 m e o menor 156 m. Começou a ser construído em 72 por Vespasiano e foi concluído em 82 por Tito. A cobertura móvel, à altura de 85 m, era sustentada por um sistema inédito de tirantes, acionada em caso de chuva para proteger seus 40.000 espectadores. Diante da tribuna imperial, os garbosos gladiadores romanos desfilavam antes da luta e proferiam em alto e bom som: *Ave, Caesar, morituri te salutant* (Salve, César, os que vão morrer te saudam).

Exercícios

"As paixões são loucas; porém, não precisam ser burras.

Alberto Goldin (n.1940), psicanalista argentino.

01. Dê as equações das elipses cujos gráficos são representados abaixo:



Resp.: a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$; b) $\frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{5} = 1$

02. Calcular a distância focal de uma elipse cujo eixo maior mede 10 e cujo eixo menor mede 8.

$$\text{Resp.: } 2c = 6$$

03. Equação canônica da elipse com centro na origem, eixo focal sobre o eixo y e cuja medida do eixo maior é 5 e do eixo menor é 2.

$$\text{Resp.: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

04. Calcular a excentricidade da elipse $25x^2 + 16y^2 = 400$.

$$\text{Resp.: } \frac{3}{5}$$

SUGESTÃO:

Calcule inicialmente a equação canônica, dividindo todos os termos por 400:

$$\frac{25x^2}{400} + \frac{16y^2}{400} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

05. A órbita da Terra é uma elipse e o Sol ocupa um dos focos. Sabendo que o semi-eixo maior tem 153 493 000 km e que a excentricidade é de 0,0167, calcular a menor e a maior distância da Terra ao Sol.

$$\text{Resp.: } 150\,929\,660 \text{ km} \\ 156\,056\,330 \text{ km}$$

06. Determinar os pontos de intersecção da elipse $9x^2 + 4y^2 = 25$ com os eixos cartesianos.

$$\text{Resp.: } \left(-\frac{5}{3}, 0\right); \left(\frac{5}{3}, 0\right); \left(0, \frac{5}{2}\right); \left(0, -\frac{5}{2}\right)$$

07. Pedir-se a equação da elipse que passa pelos pontos $(-2, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, 1)$.

$$\text{Resp.: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

08. Equação canônica da elipse com centro na origem, eixo focal sobre o eixo x, que passa pelo ponto $A = (2\sqrt{2}, 1)$ e de excentricidade $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Resp.: } \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1$$

09. Calcular a equação canônica da elipse de centro na origem, focos no eixo das abscissas e sabendo que passa pelo ponto $A = (\sqrt{15}, -1)$ e seu semi-eixo menor é 2.

$$\text{Resp.: } \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$$

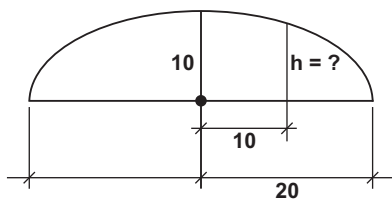
10. Um elipse tem o centro na origem, eixo focal sobre o eixo x, passa pelo ponto $A = (1, 1)$ e tem um foco em $F = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$. Calcular a excentricidade da elipse.

$$\text{Resp.: } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

11. Uma elipse tem os focos em $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$ e excentricidade igual a 0,5. Forneça a sua equação e a sua área S (da Geometria: $S = \pi ab$).

$$\text{Resp.: } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1 \text{ e } S = 18\sqrt{3} \pi \text{ u.a.}$$

12. Um arco é uma semi-elipse e o eixo maior é o vão. Se este tiver 40 m e a flecha 10 m, calcular a altura do arco a 10 m do centro da base.

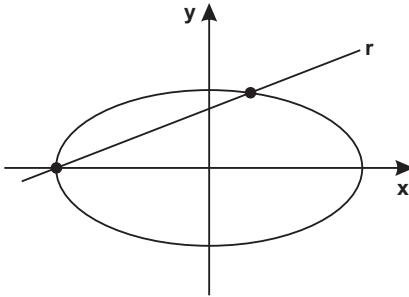


$$\text{Resp.: } 5\sqrt{3} \text{ m}$$

Série B

13. Determinar o comprimento da corda que a reta $x = 4y - 4$ determina sobre a elipse $x^2 + 4y^2 = 16$.

Resp.: $\frac{8\sqrt{17}}{5}$

SUGESTÃO:

a) Para se obter os pontos de intersecção da elipse com a reta basta resolver o sistema

$$\begin{cases} x = 4y - 4 \\ x^2 + 4y^2 = 16 \end{cases}$$

donde se obtém

$$P = (-4, 0) \text{ e}$$

$$P' = \left(\frac{12}{5}, \frac{8}{5} \right).$$

b) O comprimento da corda é $d(P, P')$.

14. Determinar os pontos de intersecção da elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ com a reta $y = 2x + 3$.

Resp.: $P = (0, 3)$ e $P' = \left(\frac{-48}{25}, \frac{-21}{25} \right)$

15. Dois dos vértices de um polígono de 4 lados coincidem com os focos da elipse $9x^2 + 5y^2 = 1$ e os outros dois com os vértices do eixo menor elipse. Calcular a área do polígono.

Resp.: $\frac{4\sqrt{5}}{45}$ u.a.

16. Determinar a equação da elipse com centro na origem, focos sobre o eixo das abscissas e que passa pelos pontos $A = (2, 2)$ e $B = (2\sqrt{3}, 0)$.

$$\text{Resp.: } \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$$

SUGESTÃO:

a) Equação da elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ①

b) $A = (2, 2) \in$ ① $\Rightarrow \frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$ ②

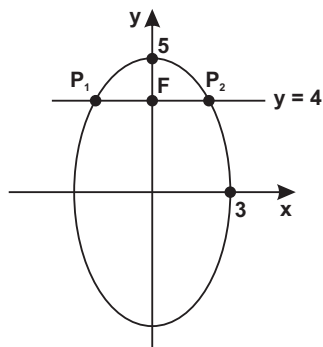
c) $B = (2\sqrt{3}, 0) \in$ ① $\Rightarrow \frac{12}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1$ ③

Resolve-se: ② e ③

17. Similarmente à parábola, o *latus rectum* da elipse é uma das duas cordas focais da elipse e perpendiculares ao seu eixo maior. Então, dada a elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$, pede-se comprimento do *latus rectum*.

$$\text{Resp.: } \frac{18}{5}$$

SUGESTÃO:



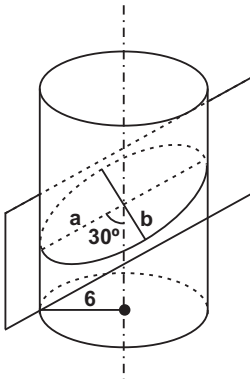
Um dos focos da elipse é $F = (0, 4)$.
Os pontos de intersecção da reta $y = 4$
com a elipse é $P_1 = \left(-\frac{9}{5}, 4\right)$ e $P_2 = \left(\frac{9}{5}, 4\right)$.

O comprimento é a $d(P_1, P_2)$.

18. Um cilindro de revolução tem por base um círculo de $R = 6$. Determinar a área da elipse intersecção do cilindro por um plano que forma com o seu eixo um ângulo de 30° .

Resp.: 72π u.a.

SUGESTÃO:



Da figura:

a) $b = 6$

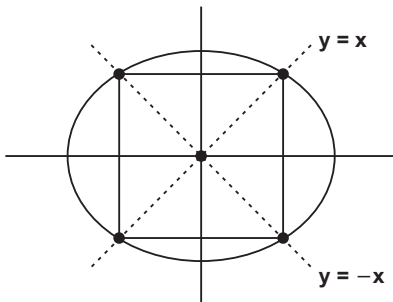
b) $a = \frac{6}{\sin 30^\circ} = 12$

c) $S = \pi ab$

19. Determinar a área do quadrado inscrito na elipse $9x^2 + 16y^2 = 625$.

Resp.: 100 u.a.

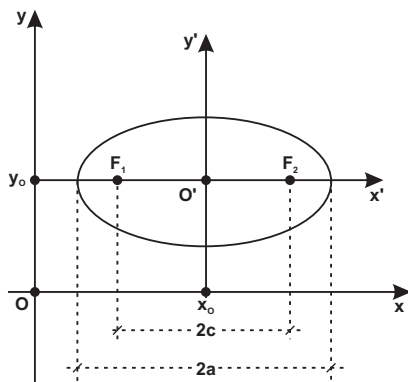
SUGESTÃO:



Os vértices do quadrado são obtidos pelas intersecções das retas $y = x$ e $y = -x$ com a elipse.

8. EQUAÇÃO DA ELIPSE CUJO CENTRO É $O' = (x_0, y_0)$ E CUJOS EIXOS SÃO PARALELOS AOS EIXOS COORDENADOS

8. a) O eixo maior é paralelo ao eixo x .



Por meio de uma translação de eixos, representamos um novo sistema $x'O'y'$, cuja origem $O' = (x_0, y_0)$ coincide com o centro da elipse.

A equação da elipse referida ao novo sistema $x'O'y'$ é:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

No entanto, as fórmulas de translação fornecem:

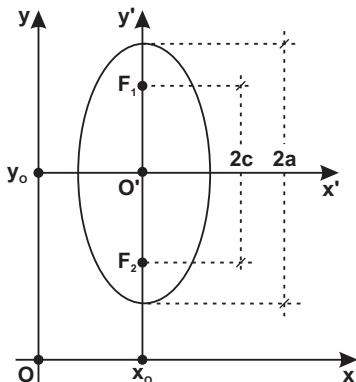
$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \quad (2)$$

Levando (2) em (1):

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (I)$$

que representa a equação canônica da elipse cujo centro é $O' = (x_0, y_0)$ e cujos focos estão sobre uma paralela ao eixo x .

8. b) O eixo maior é paralelo ao eixo y .



Adotando um raciocínio similar ao caso (I), ter-se-á para equação da elipse:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1 \quad (II)$$

Em (I) e (II) eliminando-se os denominadores, desenvolvendo-se os produtos notáveis e ordenando-se as variáveis, a equação da elipse assume a forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, em que A e C têm o mesmo sinal e $A \neq C$.

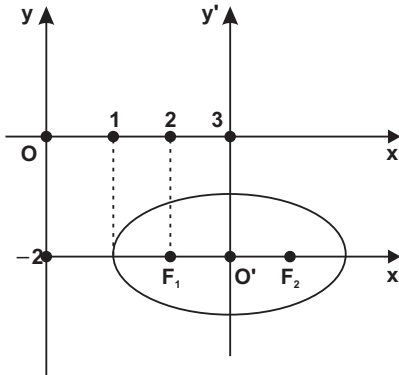
Exercícios Resolvidos

"Educamos com o que somos e não com o que dizemos."

Euzébio Silveira da Motta (1847-1920), escritor curitibano.

01. Determinar as equações das elipses representadas.

1. a)



RESOLUÇÃO:

Da figura obtém-se:

$$O' = (3, -2), a = 2 \text{ e } c = 1.$$

Cálculo de b :

$$b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}$$

A equação da elipse

é da forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

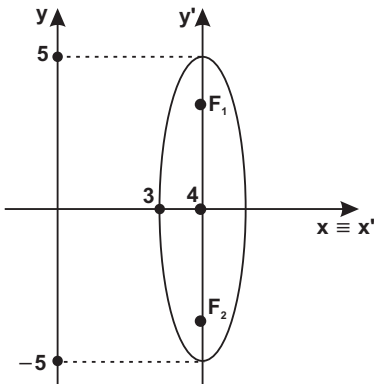
Levando os correspondentes valores na equação acima:

$$\frac{(x - 3)^2}{4} + \frac{(y + 2)^2}{3} = 1$$

Obs.:

As coordenadas dos focos são: $F_1 = (2, -2)$ e $F_2 = (4, -2)$.

1. b)



RESOLUÇÃO:

Obtemos da figura:

$$O' = (4, 0), a = 5 \text{ e } b = 1.$$

A elipse representada tem equação do tipo:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

Substituindo os valores obtidos da figura na equação acima:

$$\frac{(x - 4)^2}{1} + \frac{(y - 0)^2}{25} = 1$$

02. Determinar a equação canônica da elipse

$$9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 109 = 0.$$

RESOLUÇÃO:

Pela translação deve-se eliminar os termos em x e em y (do 1.º grau).

2. a) Fórmulas de translação:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}$$

2. b) Levando na equação dada:

$$9(x_0 + x')^2 + 4(y_0 + y')^2 - 54(x_0 + x') - 32(y_0 + y') + 109 = 0 \quad \textcircled{1}$$

Fazendo o coeficiente de $x' = 0$:

$$18x_0 - 54 = 0 \Rightarrow x_0 = 3$$

Fazendo o coeficiente de $y' = 0$:

$$8y_0 - 32 = 0 \Rightarrow y_0 = 4$$

Então o centro $O' = (3, 4)$.

Anova equação tem a forma: $9x'^2 + 4y'^2 + F' = 0$,

onde: $F' = 9(3)^2 + 4(4)^2 - 54(3) - 32(4) + 109 = -36$

Destarte: $9x'^2 + 4y'^2 - 36 = 0$ $\textcircled{2}$

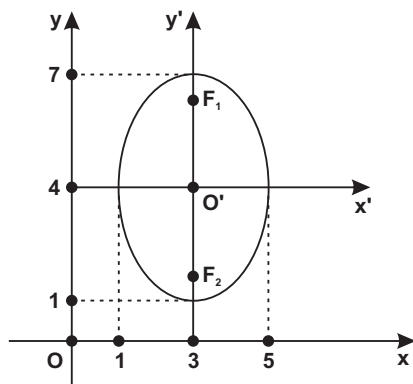
Obs.:

Substituindo $O' = (3, 4)$ em $\textcircled{1}$ igualmente obter-se-ia $\textcircled{2}$.

2. c) Dividindo todos os termos de $\textcircled{2}$ por 36:

$$\frac{9x'^2}{36} + \frac{4y'^2}{36} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1 \quad (\text{Resp.})$$

2. d) Gráfico:



Coordenadas dos focos:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$$

$$c = \sqrt{5}$$

$$F_1 = (3, 4 + \sqrt{5})$$

$$F_2 = (3, 4 - \sqrt{5})$$

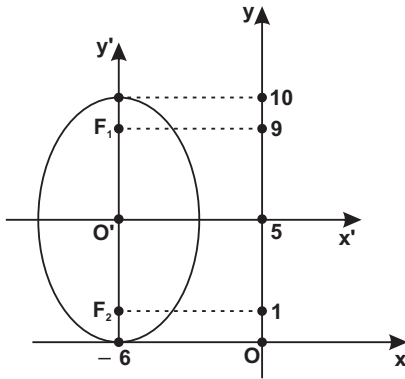
Exercícios

"A matemática vista com justeza, possui não apenas verdade, mas suprema beleza – uma beleza fria e austera, como só a grande arte pode mostrar."

Bertrand Russel (1872-1970), filósofo e matemático inglês.

01. Dada a equação da elipse $\frac{(x+6)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$, pede-se as coordenadas dos focos, do centro e o respectivo gráfico.

Resp.:



$$\begin{aligned} O' &= (-6, 5) \\ F_1 &= (-6, 9) \\ F_2 &= (-6, 1) \end{aligned}$$

02. Obter a equação da elipse com centro em $O' = (8, -2)$, com $b = 1$ e $c = \sqrt{3}$.

$$\text{Resp.: } \frac{(x-8)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$$

03. Determinar as coordenadas dos focos da elipse

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{1} = 1$$

$$\text{Resp.: } F_1 = (3 + \sqrt{3}, -1) \text{ e } F_2 = (3 - \sqrt{3}, -1)$$

04. Equação da elipse com focos em $(-2, 3)$ e $(6, 3)$ e vértices em $(-3, 3)$ e $(7, 3)$.

$$\text{Resp.: } \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

05. Obter a equação da elipse cujos vértices são $A_1 = (1, 3)$; $A_2 = (1, -7)$; $B_1 = (-2, -2)$ e $B_2 = (4, -2)$.

$$\text{Resp.: } \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

06. Calcular a equação da elipse de centro em $(4, 2)$ e tangente aos eixos coordenados, sabendo que os eixos da elipse são paralelos aos referidos eixos cartesianos.

$$\text{Resp.: } \frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

07. Qual a equação do conjunto de ponto $P = (x, y)$ cuja soma das distâncias a $F_1 = (1, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$ é 5?

$$\text{Resp.: } 84x^2 + 100y^2 - 336x - 189 = 0$$

SUGESTÃO:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 5 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 5$$

Efetuar em - se a resposta.

08. Determinar as coordenadas do centro e a equação canônica da elipse $4x^2 + y^2 - 40x - 12y + 120 = 0$.

$$\text{Resp.: } O' = (5, 6) \text{ e } \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{16} = 1$$

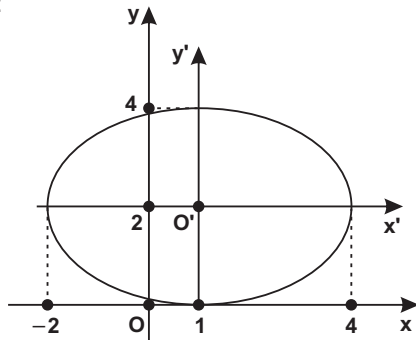
09. Achar a equação canônica e as coordenadas dos focos da elipse $4x^2 + 3y^2 - 32x + 12y + 40 = 0$.

$$\text{Resp.: } \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{12} = 1$$

$$F_1 = (4, -2 + \sqrt{3}) \text{ e } F_2 = (4, -2 - \sqrt{3})$$

10. Construir o gráfico da elipse $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$.

Resp.:



Série B

"Ter problemas na vida não é ter vida infeliz."*Da música "Pais Paraplégicos", de Padre Zezinho, scj.*

11. O ponto $B = (3, -11)$ é um dos extremos do eixo menor de uma elipse cujos focos estão sobre a reta $y + 6 = 0$. Pede-se a equação da elipse conhecendo-se ainda a sua excentricidade igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Resp.: } \frac{(x-3)^2}{50} + \frac{(y+6)^2}{25} = 1$$

12. Um ponto $P = (x, y)$ se desloca de modo que a soma de suas distâncias aos pontos $(2, -4)$ e $(2, 2)$ é 10. Deduzir a equação do lugar geométrico descrito.

$$\text{Resp.: } 25x^2 + 16y^2 - 100x + 32y - 284 = 0$$

9. EQUAÇÃO DA ELIPSE CUJO CENTRO É $O' = (x_0, y_0)$ E CUJOS EIXOS NÃO SÃO PARALELOS AOS EIXOS COORDENADOS.

Reiteramos que a existência do termo em xy na equação de uma elipse indica que os eixos da elipse são oblíquos aos eixos cartesianos. Faz-se mister a rotação, além da translação.

Exercício Resolvido

"O homem nunca sabe do que é capaz até ser obrigado a tentar."

Charles Dickens (1812-1870), escritor inglês.

Dada a elipse de equação $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y = 0$, pede-se o centro, a equação canônica e o gráfico.

RESOLUÇÃO:

a) Ordem das transformações:

$$B^2 - 4AC = (6)^2 - 4(5)(5) \neq 0 \quad \begin{cases} 1) \text{ translação} \\ 2) \text{ rotação} \end{cases}$$

b) Translação:

Substituindo as fórmulas de translação na equação dada:

$$5(x_0 + x')^2 + 6(x_0 + x')(y_0 + y') + 5(y_0 + y')^2 - 4(x_0 + x') + 4(y_0 + y') = 0 \quad \textcircled{1}$$

* fazendo o coeficiente de $x' = 0$
 $10x_0 + 6y_0 - 4 = 0$

* fazendo o coeficiente de $y' = 0$
 $6x_0 + 10y_0 + 4 = 0$

Resolvendo o sistema acima obtém-se $x_0 = 1$ e $y_0 = -1$.

Então o centro da elipse é $O' = (1, -1)$.

Levando $O' = (1, -1)$ em ① :

$5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 - 4 = 0$ ②

c) Rotação (vamos eliminar o termo em $x'y'$ na equação acima):

Na equação dada $A = C \Rightarrow \theta = 45^\circ$

Fórmulas de rotação :

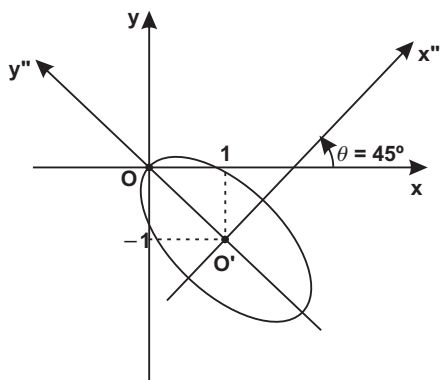
$$\left. \begin{aligned} x' &= x'' \cos \theta - y'' \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} (x'' - y'') \\ y' &= x'' \sin \theta + y'' \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} (x'' + y'') \end{aligned} \right\} \text{③}$$

Levando ③ em ② obtém - se a equação da elipse:

$8x''^2 + 2y''^2 = 4$ ou na forma canônica:

$$\frac{x''^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y''^2}{2} = 1$$

Gráfico:



* da equação canônica:

$$a = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad b = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

* intersecções com os eixos cartesianos.

Tomando a equação dada e fazendo $y = 0$ resulta a equação

$$5x^2 - 4x = 0, \text{ cujas raízes são } 0 \text{ e } \frac{4}{5}.$$

Por outro lado, fazendo $x = 0$ na equação dada, obtém-se a

equação $5y^2 + 4y = 0$, cujas raízes são 0 e $-\frac{4}{5}$.

Exercícios

"Duas coisas indicam fraqueza: calar-se, quando é preciso falar; e falar, quando é preciso calar-se."

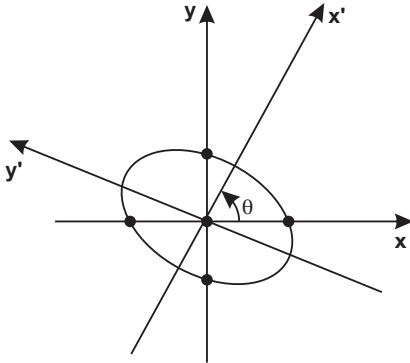
Adágio árabe

01. Obter a equação canônica da elipse $x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 - 2 = 0$.

$$\text{Resp.: } \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} = 1$$

02. Dada a equação da elipse $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 9 = 0$, pede-se para calcular a sua equação canônica e traçar o gráfico.

$$\text{Resp.: } x'^2 + \frac{y'^2}{9} = 1$$



Obs.:

1) $a = \frac{3}{2}$ e $b = 1$

2) a elipse corta o eixo x nos pontos $\pm \frac{3\sqrt{5}}{5}$

3) a elipse intercepta o eixo y nos pontos $\pm \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

03. Calcular a equação da elipse de focos $F_1 = (0, 1)$ e $F_2 = (1, 0)$ e cuja medida do eixo maior é $2a = 3$.

$$\text{Resp.: } 32x^2 + 8xy + 32y^2 - 36x - 36y - 45 = 0$$

SUGESTÃO:

O eixo maior é oblíquo aos eixos coordenados. Aplique a definição de elipse: $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$.

Série B

"Suaviter in modo, fortiter in re."

Axioma latino: Suave no modo, forte na ação.

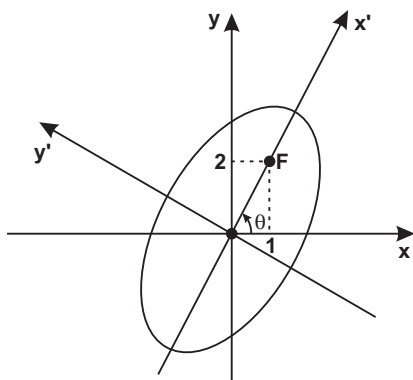
04. Uma elipse tem o centro na origem e:

- a) eixo focal sobre a reta $y = 2x$;
- b) um dos focos em $F = (1, 2)$;
- c) $a = 2\sqrt{5}$ e $c = \sqrt{5}$.

Pede-se a sua equação.

Resp.: $19x^2 - 4xy + 16y^2 = 300$

SUGESTÃO:



1) Equação da elipse em relação a $x'Oy'$:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad \textcircled{1}$$

2) Se $a = 2\sqrt{5}, c = \sqrt{5} \Rightarrow b^2 = 15$

3) Da figura:

$$\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ e } \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

4) Fórmulas de rotação:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{2x - y}{\sqrt{5}} \\ y' &= \frac{x + 2y}{\sqrt{5}} \end{aligned} \right\} \textcircled{2}$$

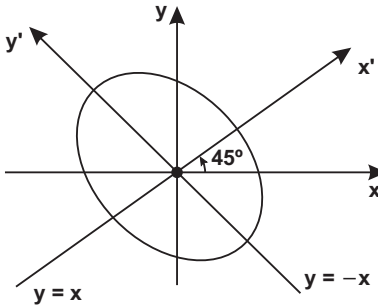
5) Substituindo $\textcircled{2}$ em $\textcircled{1}$ tem-se a resposta.

05. Uma elipse tem:

- a) eixo focal sobre a reta $y = -x$
- b) eixo menor sobre a reta $y = x$
- c) $b = 1$ e $c = \frac{1}{2}$

Calcular a sua equação.

Resp.: $9x^2 + 2xy + 9y^2 - 10 = 0$

SUGESTÃO:

1) Equação da elipse:

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1 \quad (1)$$

2) Fórmulas de rotação ($\alpha = 45^\circ$):

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos 45^\circ - y \sin 45^\circ \\ y' &= x \sin 45^\circ + y \cos 45^\circ \end{aligned} \right\} (2)$$

3) Substitua (2) em (1):

06. Uma elipse tem como focos os pontos $F_1 = (-8, 15)$ e $F_2 = (12, 5)$ e passa pela origem do sistema cartesiano. Qual a sua equação?

Resp.: $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 60x - 168y = 0$

PROMETA A SI MESMO

Ser forte, de maneira que nada possa perturbar a sua paz de espírito.

Falar de saúde, felicidade e prosperidade a toda pessoa que encontrar.

Fazer os seus amigos sentirem que há alguma coisa superior dentro deles.

Olhar para o lado glorioso de todas as coisas e fazer com que seu otimismo se torne realidade.

Pensar sempre no melhor, trabalhar sempre pelo melhor e esperar somente o melhor.

Esquecer os erros do passado e preparar-se para melhores realizações no futuro.

Ter tanto entusiasmo e interesse pelo sucesso alheio como pelo próprio.

Dedicar tanto tempo ao próprio aperfeiçoamento que não lhe sobre tempo para criticar os outros.

Ser grande na contrariedade, nobre na cólera, forte no temor, e receber alegremente a provação.

Fazer um bom juízo de si mesmo e proclamar este fato ao mundo, não em altas vozes, mas em grandes feitos.

Viver na certeza de que o mundo estará sempre ao seu lado, enquanto lhe dedicar o que há de melhor dentro de si mesmo.

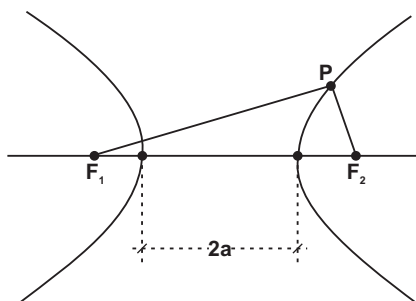
Autor desconhecido.

A Hipérbole

1. DEFINIÇÃO

É o lugar geométrico dos pontos de um plano tais que o valor absoluto da diferença de suas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos), do mesmo plano, é uma constante ($2a$), onde $2a < d(F_1, F_2)$:

Assim:



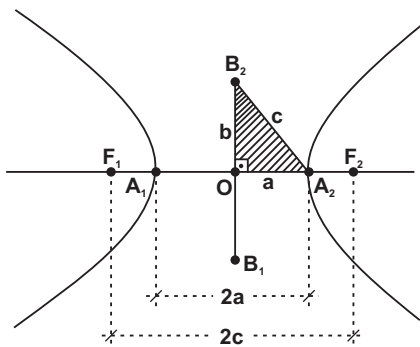
$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

A hipérbole é uma curva com dois **ramos** e o valor absoluto pode ser desconsiderado desde que adotemos a diferença entre a maior e o menor distância.

Obs.:

A etimologia da palavra **hipérbole**, você encontra na pág. 231.

2. ELEMENTOS DA HIPÉRBOLE



F_1, F_2 : focos. A distância entre os focos F_1 e F_2 , igual a $2c$, denomina-se **distância focal**.

O: Centro da hipérbole; é o ponto médio do segmento F_1F_2 .

A_1, A_2 : vértices da hipérbole.

Eixo real ou transverso: é o segmento A_1A_2 e cujo comprimento é $2a$.

Eixo imaginário ou conjugado: é o segmento B_1B_2 e cujo comprimento é $2b$.

N.B.: ImproPRIAMENTE, por abuso de linguagem, denomina-se "eixo real" o segmento A_1A_2 e "eixo imaginário" o segmento B_1B_2 . O eixo imaginário tem como reta suporte a mediatriz do segmento A_1A_2 .

Do triângulo retângulo B_2OA_2 , hachurado na figura, obtemos a **relação notável**:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

3. EXCENTRICIDADE DA HIPÉRBOLE

É definida pela relação

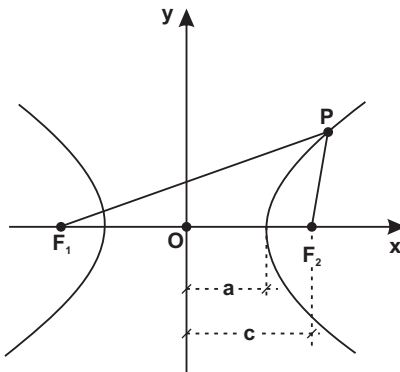
$$\mathcal{E} = \frac{c}{a} \quad (\mathcal{E} > 1)$$

Como a e c são positivos e $c > a$, depreende-se que $\mathcal{E} > 1$.

Há uma proporcionalidade entre a excentricidade e a abertura da hipérbole: quanto maior a excentricidade maior a abertura e vice-versa.

4. EQUAÇÃO CANÔNICA DA HIPÉRBOLE DE CENTRO NA ORIGEM

4. a) O eixo real coincide com o eixo x .



Seja:
 $P = (x, y)$ um ponto genérico da hipérbole.

$F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$.

Por definição:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

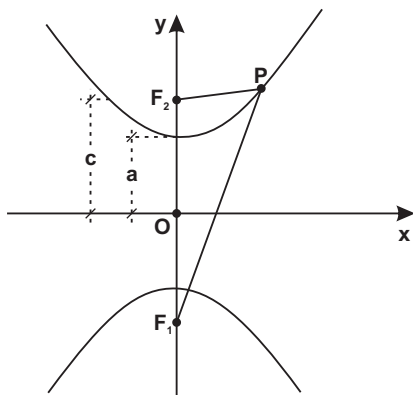
$$|\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}| = 2a$$

Agora, empregando as mesmas operações para deduzir a equação da elipse, e mutatis mutandis, chegamos à equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{eixo real} \equiv \text{eixo } x)$$

cognominada equação canônica ou reduzida da hipérbole.

4. b) O eixo real coincide com o eixo y.



O posicionamento da hipérbole no sistema cartesiano fornece:

$$F_1 = (0, -c) \text{ e } F_2 = (0, c)$$

Analogamente demonstra-se que para um ponto $P = (x, y)$ pertencente à hipérbole tem-se a equação canônica:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

(eixo real \equiv eixo y)

Vale enfatizar que na elipse sempre $a > b$. Na hipérbole, no entanto, pode-se ter $a > b$, $a = b$ ou $a < b$.

Ademais, numa hipérbole o eixo real, bem como o eixo focal, coincide com o eixo da coordenada correspondente à variável de coeficiente positivo (se a equação estiver na forma canônica).

Exemplo:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{24} = 1 \rightarrow \text{o eixo focal coincide com o eixo x.}$$

$$\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{8} = 1 \rightarrow \text{o eixo focal coincide com o eixo y.}$$

Exercício Resolvido

"Aquele que luta contra nós aprimora nossas qualidades. Nosso antagonista trabalha por nós."

Edmund Marke (1729-1797), escritor irlandês.

Dada a hipérbole de equação $16x^2 - 25y^2 = 400$ pede-se:

a) a equação canônica;

Dividindo todos os termos da equação dada por 400:

$$\frac{16x^2}{400} - \frac{25y^2}{400} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad (\text{Resp.})$$

b) excentricidade (\mathcal{E});

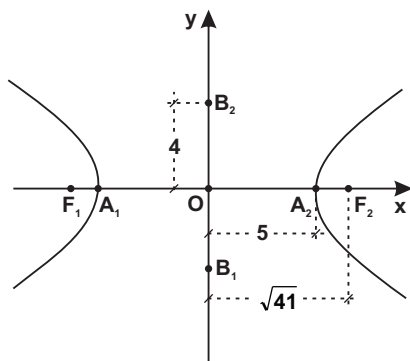
Da equação acima se obtém $a = 5$ e $b = 4$.

Cálculo de c :

$$c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 16 = 41 \Rightarrow c = \sqrt{41}$$

$$\text{Resp.: } \mathcal{E} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{41}}{5}$$

c) o gráfico.



Ainda :

$$A_1 = (-5, 0); A_2 = (5, 0)$$

$$B_1 = (0, -4); B_2 = (0, 4)$$

$$F_1 = (-\sqrt{41}, 0); F_2 = (\sqrt{41}, 0)$$

Exercícios

"Para mim, a vida não é uma 'chama breve'. Ela é uma espécie de chama esplendorosa que conseguiu segurar por algum momento, e quero fazê-la queimar o mais intensamente possível antes de passá-la às futuras gerações."

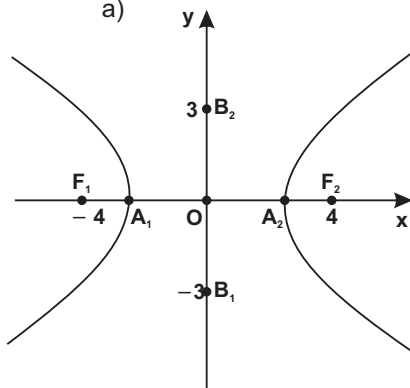
George Bernard Shaw (1856-1950), escritor irlandês.

01. Determinar a distância focal da hipérbole $9x^2 - 16y^2 = 144$.

Resp.: 10

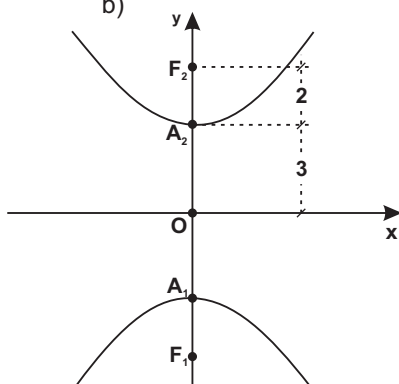
02. Obter as equações das hipérbolas abaixo configuradas.

a)



$$\text{Resp.: } \frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$$

b)



$$\text{Resp.: } \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

03. Equação da hipérbole com focos em $F_1 = (0, 8)$ e $F_2 = (0, -8)$ e vértices em $(0, 6)$ e $(0, -6)$.

$$\text{Resp.: } \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{28} = 1$$

04. Equação da hipérbole cuja excentricidade é $\sqrt{5}$ e cuja distância focal é $4\sqrt{5}$. (O centro coincide com a origem e os focos estão sobre o eixo x).

$$\text{Resp.: } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$

05. Obter a excentricidade da hipérbole $5x^2 - 5y^2 = k$ (para $k \neq 0$).

$$\text{Resp.: } \sqrt{2}$$

06. Uma hipérbole tem o centro na origem e o eixo real coincide com o eixo x . Ademais, $2b = 6$ e $\varepsilon = \frac{5}{4}$. Determine a sua equação.

$$\text{Resp.: } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

07. Obter a equação da hipérbole de focos em $F_1 = (2, 0)$ e $F_2 = (-2, 0)$ e que passa pelo ponto $P = (\sqrt{3}, 1)$.

$$\text{Resp.: } x^2 - y^2 = 2$$

08. Calcular a equação da hipérbole de centro na origem e eixo real sobre o eixo das ordenadas, que passa pelos pontos $P = \left(0, \frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$ e $Q = (4, 6)$.

$$\text{Resp.: } 5y^2 - 9x^2 = 36$$

SUGESTÃO:

a) Equação da hipérbole: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

b) $P \in$ hipérbole $\Rightarrow a^2 = \frac{36}{5}$

c) $Q \in$ hipérbole $\Rightarrow b^2 = 4$

Série B

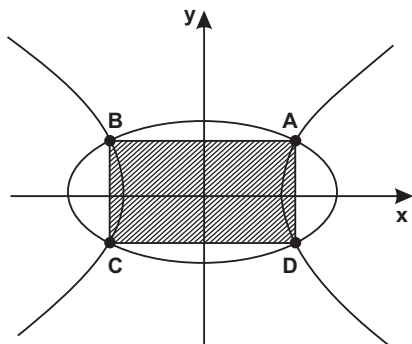
"Como é raro ter o mesmo critério para julgar o próximo e a nós mesmos."

Tomás de Kempis (c. 1380-1471), in Imitação de Cristo.

09. A elipse $2x^2 + 3y^2 = 24$ e a hipérbole $x^2 - y^2 = 5$ se interceptam em 4 pontos A, B, C, D . Determinar a área do retângulo $ABCD$.

$$\text{Resp.: } S = \frac{4\sqrt{546}}{5} \text{ u.a.}$$

SUGESTÃO:



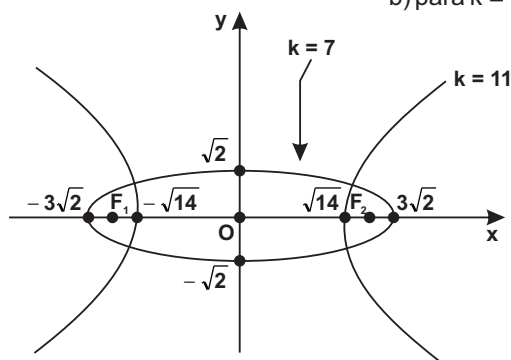
Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 24 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$$

10. Para $k = 7$ e para $k = 11$, representar no sistema cartesiano os gráficos de $\frac{x^2}{25-k} + \frac{y^2}{9-k} = 1$.

Resp.: a) para $k = 7 \Rightarrow \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1$ (elipse)

b) para $k = 11 \Rightarrow \frac{x^2}{14} - \frac{y^2}{2} = 1$ (hipérbole)



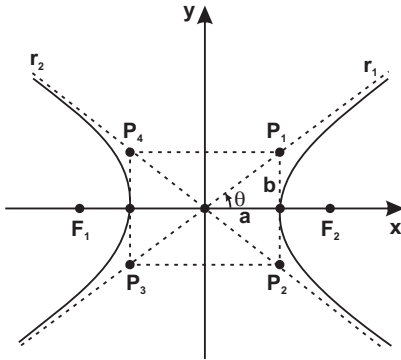
A figura ao lado mostra as duas curvas e observe inclusive que a elipse e a hipérbole têm os mesmos focos $F_1 = (-4, 0)$ e $F_2 = (4, 0)$. São homofocais.

5. ASSÍNTOTAS DA HIPÉRBOLE

a) Definição

Na figura que vem a seguir observe a hipérbole e o retângulo, cujos lados são $2a$ e $2b$.

As retas r_1 e r_2 que contêm as diagonais desse retângulo são chamadas de ASSÍNTOTAS da hipérbole. A distância de um ponto P da hipérbole à assíntota tende para zero quando o ponto P da hipérbole se afasta para o infinito.



As assíntotas são excelentes guias para se traçar o gráfico da hipérbole: o esboço adequado de uma hipérbole pode ser feito traçando-se inicialmente o retângulo e as retas que contêm as diagonais (assíntotas). O ramo de cada hipérbole tem vértice tangente ao lado do retângulo e "abre-se" a curva tendendo para as assíntotas.

b) Cálculo das equações das assíntotas

Como as duas assíntotas acima figuradas passam pela origem, são retas do tipo:

$$y = \pm mx$$

$$\text{mas } m = \operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a}$$

donde :

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

Essas são as equações das duas assíntotas da hipérbole, que também podem se apresentar sob a forma de

$$r_1: bx - ay = 0$$

$$r_2: bx + ay = 0$$

c) Recurso mnemônico

Só ser assaz útil a seguinte regra prática: a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

pode ser escrita sob a forma $bx^2 - ay^2 = a^2b^2$. Para se obter as equações das assíntotas basta substituir por zero o 2.º membro desta última equação. Assim:

$$bx^2 - ay^2 = 0 \text{ ou fatorando o produto notável:}$$

$$r_1: bx - ay = 0 \text{ e } r_2: bx + ay = 0.$$

Analogamente, a hipérbole $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ pode ser escrita sob a forma $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$. Se o membro direito é substituído por zero, as assíntotas têm equações:

$$r_1: by - ax = 0 \text{ e } r_2: by + ax = 0$$

Exercício Resolvido

Calcular as equações das assíntotas da hipérbole $16x^2 - 25y^2 = 400$.

RESOLUÇÃO:

Na equação dada faz-se o 2.º membro igual a zero: $16x^2 - 25y^2 = 0$

Decompondo o produto notável:

$(4x - 5y)(4x + 5y) = 0$ ou $r_1: 4x - 5y = 0$ e $r_2: 4x + 5y = 0$ (Resp.)

6. HIPÉRBOLE EQUILÁTERA

a) Definição

Hipérbole equilátera é aquela em que $a = b$, ou seja, a medida do semi-eixo real é igual à medida do semi-eixo imaginário.

b) Cálculo da equação da hipérbole equilátera

Sendo $a = b$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 - y^2 = a^2$$

equação que tipifica uma hipérbole equilátera.

7. IDENTIFICAÇÃO DA HIPÉRBOLE

Uma equação do tipo $Ax^2 + Cy^2 = F$ representa uma hipérbole com centro na origem e eixos coincidentes aos eixos cartesianos, se e somente se, A e C têm sinais contrários e F não nulo.

Ex.: $2x^2 - 3y^2 = 5$

Quando F for nulo e A e C têm sinais contrários, a hipérbole se degenera num par de retas reais e concorrentes.

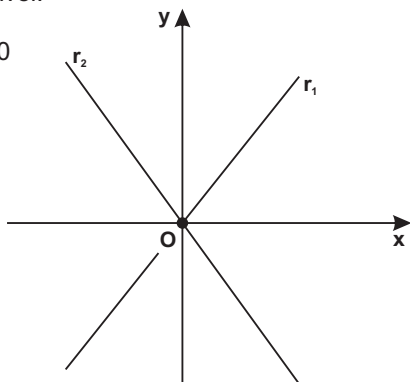
Ex.: $4x^2 - 9y^2 = 0$

decompondo o produto notável:

$(4x - 3y)(4x + 3y) = 0$ ou

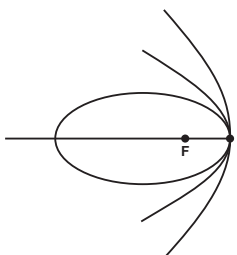
$r_1: 4x - 3y = 0$ e $r_2: 4x + 3y = 0$

Gráfico de $4x^2 - 9y^2 = 0 \Rightarrow$



8. APLICAÇÕES PRÁTICAS DE UMA HIPÉRBOLE

(Leitura Complementar)



a) **Mecânica Celeste:** dependendo de sua velocidade, um cometa tem uma órbita elíptica, parabólica ou hiperbólica (o foco coincide com o Sol). Vide figura à esquerda.

Pausa para refletir: Quando o discípulo perguntou a Platão (428 a.C.; 348 a.C.), o que faz Deus, o mestre responde: «Deus eternamente geometriza».

A astronomia registra aparições – visíveis ou não a olho nu – de mais de 3 mil cometas, e os mais frequentes têm órbitas elípticas. O mais famoso de todos é o cometa Halley, observado pela última vez em 1986 e prevista a próxima aparição em 2062.

b) Em Mecânica dos Fluidos e em alguns problemas re-ferentes ao fluxo estacionário de eletricidade são utilizadas hipér-boles homofocais (de mesmo foco).

c) O sistema LORAN (longe range navigation) e o sistema DECCA de navegação aérea usam a hipérbole. Da Terra, concomitantemente são transmitidos sinais de rádio de dois pontos fixos F_1 e F_2 que são captados pelo aeroplano em P, ao longo de t_1 e t_2 segundos, respectivamente. A diferença entre t_1 e t_2 determina $2a$ e assim se obtém a característica da hipérbole na qual está P.

Igualmente na navegação marítima utilizam-se sistemas hiperbólicos: o sistema RADUX (de baixíssima frequência) e o sistema LORAC (de ondas contínuas para observações de grande precisão).

Exercícios

"Trabalho não mata ninguém. O que mata é a raiva."

Adib Jatene (1929-2014), cardiologista e ministro da Saúde de 1994 a 96.

1. Pede-se para construir o gráfico de cada equação:

a) $x^2 + y^2 = 9$

f) $x^2 - y^2 = 0$

b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

g) $x^2 + y^2 = 0$

c) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$

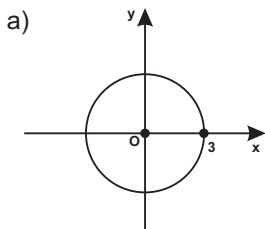
h) $x^2 - 4 = 0$

d) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

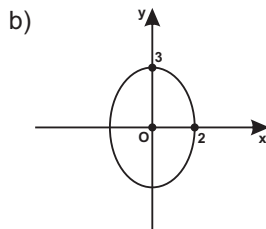
i) $x^2 + 2y^2 = -1$

e) $y^2 - x = 0$

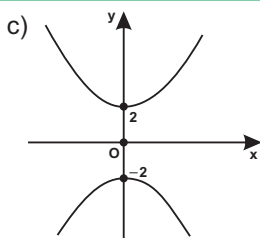
Resp.:



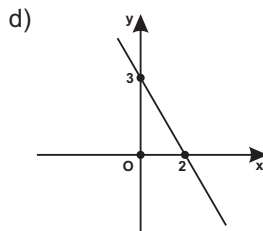
Circunferência de raio = 3.



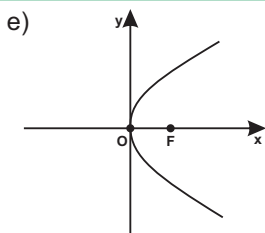
Elipse onde $a = 3$ e $b = 2$
(o eixo maior coincide com o eixo y).



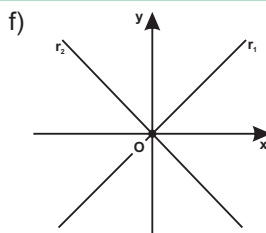
Hipérbole onde $a = 2$ e $b = 3$
(o eixo real coincide com o eixo y).



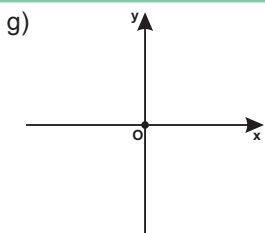
Reta.



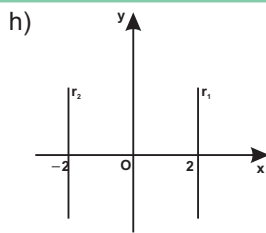
A parábola $y^2 = x$ tem concavidade voltada para a direita e o eixo focal coincide com o eixo x .



Par de retas reais:
 $(x - y)(x + y) = 0$ ou
 $r_1: x - y = 0$ e $r_2: x + y = 0$



Apenas o ponto $O = (0, 0)$ verifica tal equação.



Par de retas reais e paralelas:
 $(x - 2)(x + 2) = 0$ ou
 $r_1: x - 2 = 0$ e $r_2: x + 2 = 0$

i) Elipse imaginária.

02. Provar que a elipse $2x^2 + y^2 = 10$ e a hipérbole $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$ são homofocais (têm os mesmos focos).

03. Pede-se a equação da hipérbole equilátera que passa pelo ponto $P = (4, -2)$. O centro coincide com a origem do sistema cartesiano e os focos estão sobre o eixo x .

$$\text{Resp.: } x^2 - y^2 = 12$$

04. Achar a distância do foco superior da hipérbole $9y^2 - 16x^2 = 144$ a cada uma de suas assíntotas.

$$\text{Resp.: } 3$$

Série B

"Ah, como dói viver quando falta esperança."

Manuel Bandeira (1886-1968), poeta e escritor pernambucano.

05. Uma hipérbole tem um de seus vértices em $A = (3, 0)$ e as equações de suas assíntotas são $2x - 3y = 0$ e $2x + 3y = 0$. Determine a equação da hipérbole.

$$\text{Resp.: } 4x^2 - 9y^2 = 36$$

SUGESTÃO:

Equação da hipérbole:

a) $(2x - 3y)(2x + 3y) = k$ ou $4x^2 - 9y^2 = k$

b) $A = (3, 0) \in$ hipérbole $\Rightarrow k = 36$

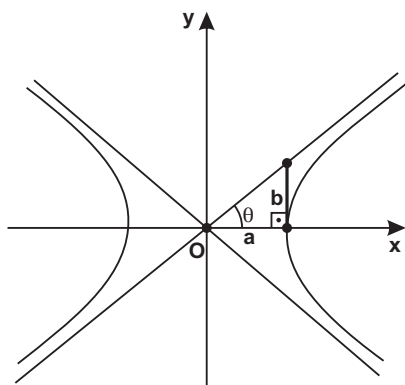
06. Obter as coordenadas dos pontos de intersecção da reta $x - 4y - 4 = 0$ com a hipérbole $x^2 - 4y^2 = 16$.

$$\text{Resp.: } (4, 0) \text{ e } \left(-\frac{20}{3}, -\frac{8}{3}\right)$$

07. Uma hipérbole tem excentricidade igual a 2. Calcular o ângulo entre as assíntotas.

$$\text{Resp.: } 2\theta = \frac{2\pi}{3}$$

SUGESTÃO:



a) $\varepsilon = \frac{c}{a} = 2 \Rightarrow c = 2a$

b) $b^2 = c^2 - a^2 = 3a^2 \Rightarrow b = a\sqrt{3}$

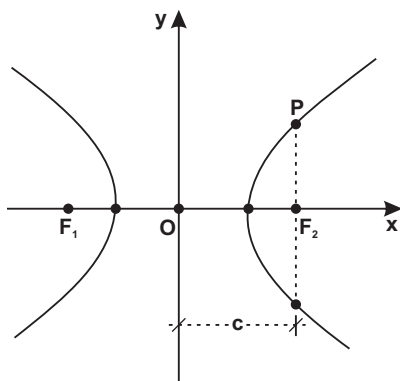
c) $\text{tg } \theta = \frac{b}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

O ângulo entre as assíntotas é 2θ .

08. Latus rectum ou corda focal mínima é a corda tirada por um foco perpendicularmente ao eixo real. Determinar o comprimento " ℓ " da latus rectum da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Resp.: $\ell = \frac{2b^2}{a}$

SUGESTÃO:



a) $P = (c, y) \in$ hipérbole:

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

b) Isolando y na equação acima:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 - a^2}{a^2}$$

mas $c^2 - a^2 = b^2$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow y = \frac{b^2}{a}$$

c) $\ell = 2y = \frac{2b^2}{a}$

Exemplificando: o comprimento da latus rectum da hipérbole

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1 \text{ é } \ell = \frac{2(\sqrt{2})^2}{2} = 2.$$

Obs.:

Similarmente deduz-se que o comprimento da latus rectum da

elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é também $\ell = \frac{2b^2}{a}$.

09. Demonstrar que a excentricidade de qualquer hipérbole equilátera é igual a $\sqrt{2}$.

SUGESTÃO:

Na hipérbole equilátera $a = b$.

Logo $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Isto posto, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$.

10. Uma hipérbole passa pelo ponto $P = (1, 2)$ e uma de suas assíntotas é a reta $3y - \sqrt{11}x = 0$. Determine a equação da hipérbole sabendo-se que o eixo real coincide com o eixo y e o centro está na origem do sistema cartesiano.

Resp.: $9y^2 - 11x^2 = 25$

SUGESTÃO:

a) Equações das assíntotas:

$$3y - \sqrt{11}x = 0 \text{ e } 3y + \sqrt{11}x = 0$$

b) Equação da hipérbole:

$$(3y - \sqrt{11}x)(3y + \sqrt{11}x) = k \text{ ou } 9y^2 - 11x^2 = k$$

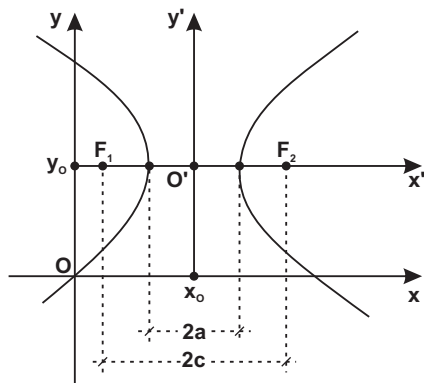
c) $P \in$ hipérbole $\Rightarrow k = 25$.

11. Calcular os pontos de intersecção da parábola $y^2 = 3x$ com a hipérbole $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{20} = 1$.

Resp.: $(2, \sqrt{6}); (2, -\sqrt{6});$
 $(10, \sqrt{30}); (10, -\sqrt{30})$

9. EQUAÇÃO DA HIPÉRBOLE CUJO CENTRO É $O' = (x_0, y_0)$ E CUJOS EIXOS SÃO PARALELOS AOS EIXOS COORDENADOS

a) O eixo real é paralelo ao eixo x .



A equação da hipérbole referida ao novo sistema $x'O'y'$ é:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

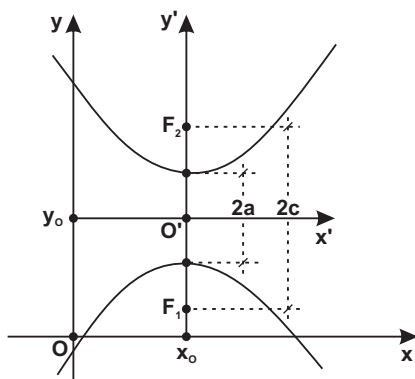
Como há translação de eixos:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \quad (2)$$

Levando (2) em (1):

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (I)$$

b) O eixo real é paralelo ao eixo y .



Adotando um raciocínio análogo ao caso (I), a hipérbole ao lado figurada tem equação:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1 \quad (II)$$

Em (I) e (II) eliminando os denominadores, desenvolvendo os produtos notáveis e ordenando as variáveis, a equação de hipérbole tem a forma da equação do 2.º grau:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
em que A e C são não nulos e diferem em sinal.

Ademais, quando a hipérbole tem o centro em $O' = (x_0, y_0)$, as assíntotas passarão por esse ponto e terão por equações:

$$y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0) \quad \text{para a hipérbole (I) ou}$$

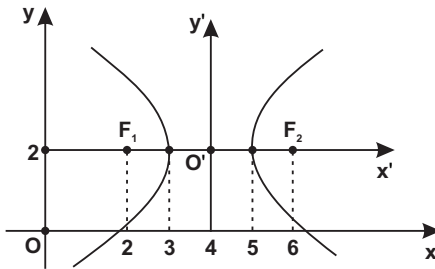
$$y - y_0 = \pm \frac{a}{b}(x - x_0) \quad \text{para a hipérbole (II)}$$

Exercícios Resolvidos

"Os que se mostram fortes contra os fracos são geralmente fracos contra os fortes."

Leoni Kanef

01. Determinar a equação da hipérbole abaixo configurada:



Obtemos da figura:

$$O' = (4, 2); a = 1 \text{ e } c = 2.$$

Cálculo de b :

$$b^2 = c^2 - a^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}.$$

A equação da hipérbole é da forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Substituindo os valores obtidos da figura na equação acima:

$$\frac{(x - 4)^2}{1} - \frac{(y - 2)^2}{3} = 1 \quad \text{ou} \quad 3x^2 - y^2 - 24x + 4y + 41 = 0$$

Obs.:

Os focos têm coordenadas: $F_1 = (2, 2)$ e $F_2 = (6, 2)$. Aplique a equação no aplicativo Geogebra e confira o gráfico.

02. Obter a equação canônica da hipérbole

$$4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$$

a) Fórmulas de translação:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}$$

b) Levando na equação dada:

$$4(x_0 + x')^2 - (y_0 + y')^2 - 8(x_0 + x') - 4(y_0 + y') - 4 = 0 \quad (1)$$

* fazendo o coeficiente de $x' = 0$

$$8x_0 - 8 = 0 \Rightarrow x_0 = 1$$

* fazendo o coeficiente de $y' = 0$

$$-2y_0 - 4 = 0 \Rightarrow y_0 = -2$$

Então $O' = (1, -2)$.

c) A nova equação tem a forma:

$$4x'^2 - y'^2 + F' = 0$$

mas:

$$F' = 4(1)^2 - (-2)^2 - 8(1) - 4(-2) - 4 = -4$$

então:

$$4x'^2 - y'^2 = 4 \quad \textcircled{2}$$

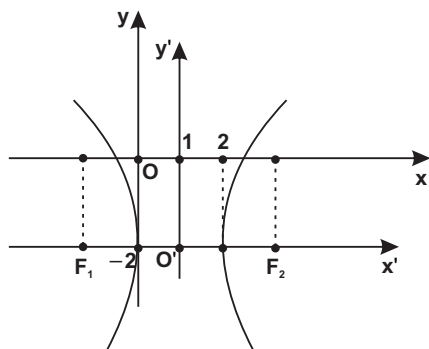
Obs.:

Se levássemos $O' = (1, -2)$ em ① igualmente obteríamos ②.

Dividindo todos os termos de ② por 4:

$$\frac{x'^2}{1} - \frac{y'^2}{4} = 1 \quad (\text{Resp.})$$

d) Gráfico:



Coordenadas dos focos:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{5}$$

$$F_1 = (\sqrt{5} - 1, -2)$$

$$F_2 = (\sqrt{5} + 1, -2)$$

Exercícios

“Quando morreres, só levarás contigo aquilo que tiveres dado.”

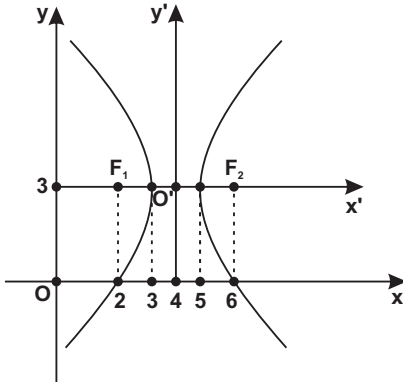
Saadi (1184-1291), poeta persa.

01. Uma hipérbole tem equação $\frac{(x-1)^2}{7} - \frac{(y-2)^2}{2} = 1$. Pede-se as coordenadas dos focos.

Resp.: $F_1 = (-2, 2)$ e $F_2 = (4, 2)$

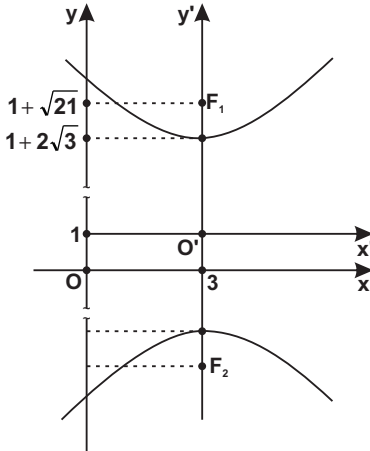
02. Calcular as equações das hipérbolas abaixo representadas:

a)



Resp.: $\frac{(x-4)^2}{1} - \frac{(y-3)^2}{3} = 1$

b)



Resp.: $\frac{(y-1)^2}{12} - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$

03. Equação da hipérbole sabendo-se que um dos focos é $F = (-2, 2)$, o centro é $O' = (-2, -1)$ e $2a = 4$.

Resp.: $\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x+2)^2}{5} = 1$

04. Obter a equação da hipérbole de eixos paralelos aos eixos cartesianos com focos em $(1, 0)$ e $(1, 4)$ e excentricidade igual a 3.

$$\text{Resp.: } \frac{(y-2)^2}{\frac{4}{9}} - \frac{(x-1)^2}{\frac{32}{9}} = 1$$

05. Achar a equação da hipérbole de centro em $(1, 0)$, um foco em $(1 + \sqrt{2}, 0)$ e um vértice em $(0, 0)$.

$$\text{Resp.: } x^2 - y^2 - 2x = 0$$

06. Equações das assíntotas da hipérbole $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$.

$$\text{Resp.: } 3x - 4y - 10 = 0 \text{ e } 3x + 4y - 2 = 0$$

07. Obter a excentricidade da hipérbole $x^2 - 3y^2 + 2x + 24y = 44$.

$$\text{Resp.: } 2$$

08. Determinar as coordenadas dos focos da hipérbole $x^2 - 2y^2 - 6x + 8y - 1 = 0$

$$\text{Resp.: } F_1 = (3 - \sqrt{3}, 2) \text{ e } F_2 = (3 + \sqrt{3}, 2)$$

Série B

"Brasil: fraude explica".

Carlito Maia (1924-2002), pensador e publicitário mineiro.

09. Calcular as equações das assíntotas da hipérbole $y^2 - x^2 + 4y + 4x - 1 = 0$.

$$\text{Resp.: } x + y = 0 \text{ e } x - y - 4 = 0$$

SUGESTÃO:

Utilize as fórmulas de translação para obter o centro $O' = (2, -2)$

e a equação canônica $\frac{y'^2}{1} - \frac{x'^2}{1} = 1$ (onde $a = 1$ e $b = 1$). Como

o eixo real é paralelo ao eixo y , as equações das assíntotas têm a

forma $y - y_0 = \pm \frac{a}{b}(x - x_0)$.

10. As assíntotas de uma hipérbole são as retas $x + y + 2 = 0$ e $x - y + 3 = 0$. Obter a equação dessa hipérbole, sabendo que ela passa pelo ponto $P = (3, 1)$.

$$\text{Resp.: } x^2 - y^2 + 5x + y - 24 = 0$$

SUGESTÃO:

a) Equação da hipérbole

$$(x + y + 2)(x - y + 3) = k \quad \textcircled{1}$$

b) Substituindo-se $P = (3, 1)$ em $\textcircled{1}$ obtém-se $k = 30$.

c) Leva-se $k = 30$ em $\textcircled{1}$.

11. Obter as assíntotas da hipérbole tendo-se $\varepsilon = \sqrt{5}$ e cujos vértices estão em $(-5, -1)$ e $(-5, -3)$.

$$\text{Resp.: } x - 2y + 1 = 0 \text{ e } x + 2y + 9 = 0$$

12. Um ponto $P = (x, y)$ se move de tal sorte que sua distância ao ponto $A = (3, 2)$ mantém-se sempre igual ao quádruplo de sua distância à reta $r: y + 1 = 0$. Pede-se a equação do lugar geométrico descrito por P .

$$\text{Resp.: } x^2 - 15y^2 - 6x - 36y - 3 = 0 \text{ (hipérbole)}$$

SUGESTÃO:

$$d(P, A) = 4d(P, r) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2} = 4 \left| \frac{y + 1}{\sqrt{1}} \right|$$

desenvolvendo tem-se a resposta.

10. EQUAÇÃO DA HIPÉRBOLE CUJO CENTRO É $O' = (x_0, y_0)$ E CUJOS EIXOS NÃO SÃO PARALELOS AOS EIXOS COORDENADOS.

Reitera-se que existindo o termo em xy na equação de uma hipérbole, os eixos da hipérbole são oblíquos aos eixos cartesianos. Fulcrado em teoria já exposta, há necessidade da rotação, além da translação.

Exercício Resolvido

“O pessimista se queixa do vento. O otimista espera que o vento mude. E o realista ajusta as velas.”

William Ward

Dada a hipérbole de equação $3x^2 - 4xy + 8x - 1 = 0$, pede-se o centro, a equação canônica e o gráfico.

RESOLUÇÃO:

a) Ordem das transformações:

$$B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4(3)(0) \neq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ translação} \\ 2) \text{ rotação} \end{array} \right.$$

b) Translação:

Levando as fórmulas de translação na equação dada:

$$3(x_0 + x')^2 - 4(x_0 + x')(y_0 + y') + 8(x_0 + x') - 1 = 0 \quad (1)$$

* fazendo o coeficiente de $x' = 0$

$$6x_0 - 4y_0 + 8 = 0$$

* fazendo o coeficiente de $y' = 0$

$$-4x_0 = 0$$

Resolvendo o sistema acima obtém-se $x_0 = 0$ e $y_0 = 2$.

Então o centro da hipérbole é $O' = (0, 2)$.

Substituindo $O' = (0, 2)$ em (1):

$$3x'^2 - 4x'y' - 1 = 0 \quad (2)$$

c) Rotação (vamos eliminar o termo em $x'y'$ na equação acima):

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{-4}{3 - 0} = -\frac{4}{3}$$

Para $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

$$\operatorname{tg} \theta = 2 \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (\theta \cong 63^\circ)$$

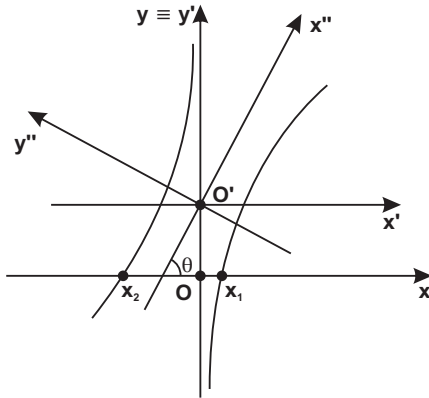
Fórmulas de rotação :

$$\left. \begin{array}{l} x' = x'' \cos \theta - y'' \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} (x'' - 2y'') \\ y' = x'' \operatorname{sen} \theta + y'' \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} (2x'' + y'') \end{array} \right\} (3)$$

Levando ③ em ② obtém-se a equação da hipérbole:

$$x''^2 - 4y''^2 + 1 = 0 \text{ ou na forma canônica: } \frac{y''^2}{1} - \frac{x''^2}{4} = 1$$

d) Gráfico:



a) A hipérbole figurada tem $O' = (0, 2)$,

$$a = \frac{1}{2} \text{ e } b = 1.$$

b) Intersecções com os eixos cartesianos.

Na equação dada, fazendo $y = 0$ tem-se a equação $3x^2 + 8x - 1 = 0$ cujas raízes são $x_1 = 0,11$ e $x_2 = -2,78$ (que são os pontos onde a hipérbole corta o eixo das abscissas). A hipérbole não corta o eixo das ordenadas.

Exercícios

"Nem todos os otimistas são profissionais de sucesso. Mas todos os profissionais de sucesso são otimistas."

Sérgio Silbel Reis, publicitário, citado por Joelmir Beting.

01. Calcular a equação canônica da hipérbole

$$x^2 - 5xy + y^2 + 8x - 20y + 15 = 0.$$

$$\text{Resp.: } \frac{y''^2}{2} - \frac{x''^2}{3} = 1$$

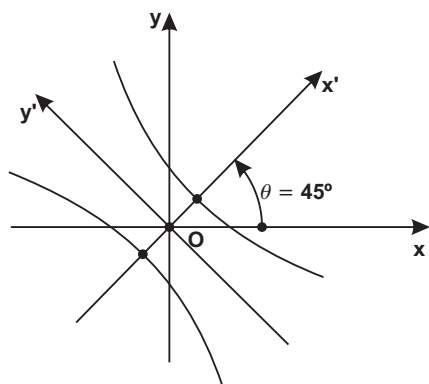
02. Dados os focos $F_1 = (-2, -1)$ e $F_2 = (1, 3)$, obter a equação da hipérbole com tais focos e semi-eixo igual a 1.

$$\text{Resp.: } 20x^2 + 48xy - 76x + 24y - 79 = 0$$

SUGESTÃO:

Seja $P = (x, y)$ um ponto genérico da hipérbole. Então:
 $D(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a.$

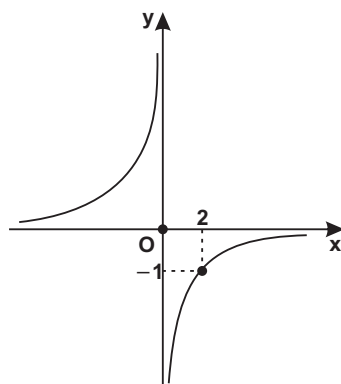
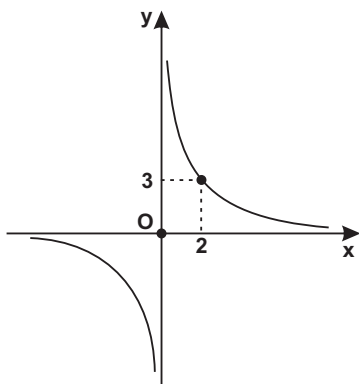
03. Obter a equação canônica e desenhar o gráfico da hipérbole $x^2 + 3xy + y^2 - 2 = 0$.



Resp.: $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{4} = 1$ ($\theta = 45^\circ$)

A hipérbole intercepta os eixos cartesianos nos pontos $\pm\sqrt{2}$.

04. Uma hipérbole com centro na origem e que possua assíntotas coincidentes com os eixos cartesianos tem equação do tipo $xy = k$. Achar as equações das hipérboles abaixo representadas.



Resp.: a) $xy = 6$; b) $xy = -2$

05. Dada a hipérbole equilátera $x^2 - y^2 = 8$, obter a equação desta mesma hipérbole após efetuada uma rotação de eixos de amplitude $\theta = 45^\circ$.

Resp.: $x'y' = -4$

SUGESTÃO:

a) Fórmulas de rotação :

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y') \\ y &= x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y') \end{aligned} \right\} \textcircled{1}$$

b) Levando $\textcircled{1}$ na equação $x^2 - y^2 = 8$ obter-se-á a resposta.

Conclusão: Uma hipérbole equilátera de equação $x^2 - y^2 = a^2$ assume a simples e útil forma de $x'y' = k$ quando se efetua uma rotação de eixos de amplitude $\theta = \pm 45^\circ$.

Série B

"The hardest thing to learn in life which bridge to cross and which bridge to burn."

06. Uma hipérbole tem:a) eixo focal sobre a reta $3x - 4y = 0$;b) um dos focos em $F = (8, 6)$;c) $a = 5$ e $c = 10$.

Pede-se a sua equação.

Resp.: $39x^2 + 96xy + 11y^2 = 1875$ **RESENHA DAS EQUAÇÕES CANÔNICAS DA ELIPSE, HIPÉRBOLE E PARÁBOLA**

A denominação equação canônica não merece por parte dos diversos autores consultados um tratamento uniforme. Maioria (e seguimos este posicionamento) opta em denominar equação canônica às formas:

eixo focal $\equiv x$	eixo focal $\equiv y$	nome da curva
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	elipse
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	hipérbole
$y^2 = 2px$	$x^2 = 2py$	parábola

Há autores, porém, que só admitem chamar de canônicas às equações da 1.ª coluna da tabela acima (eixo focal \equiv eixo x).

RACIOCÍNIO LÓGICO: UMA DAS MAIS RECONHECIDAS COMPETÊNCIAS SOCIOEMOCIONAIS

Há aproximadamente 25 séculos, os gregos nos deixaram de herança o prazer de pensar, que culminou no espírito cartesiano – cogito, ergo sum –, ou seja, penso, logo existo. Outro francês, Henry Poincaré, nascido em 1845, filósofo e matemático, bem complementa o estímulo à reflexão, ao pensamento crítico e ao bom discernimento: “Duvidar de tudo ou acreditar em tudo são atitudes preguiçosas. Dispensamos de refletir”.

Vivenciamos um momento histórico singular, com amplo domínio de polarizações, dogmatizações, fake news, no qual quase todo ser humano se julga no direito de ser levado a sério, mas cujas manifestações nas redes sociais são irrefletidas, rasas. E o que temos? Uma algaravia, uma profusão confusa de sons e palavras.

Diferentemente de países desenvolvidos, nossa cultura pouco valoriza o aprofundamento, o conteúdo clássico, a têmpera racional, como pouco valoriza o esforço, o mérito, o bom rendimento escolar. Pesquisadores da Universidade de Harvard provaram cientificamente que a reflexão é indispensável para o aprendizado de conteúdos mais profundos e boa performance laboral. Todo profissional com bom raciocínio dedutivo é um resolvidor de problemas – que para o mercado de trabalho é uma das mais recomendadas competências socioemocionais ou soft skills.

Defrontar-se com uma tarefa mais complexa faz bem aos neurônios, desenvolve a autonomia intelectual e a confiança para superar outros desafios. Vinte minutos dedicados a um problema difícil – mesmo que não resolvido – promovem mais pulsos elétricos nas sinapses do que a resolução de cinco outros exercícios bastante acessíveis.


Por estas e outras razões, estimular o raciocínio deve ser uma das principais incumbências dos pais e professores, em especial no ambiente escolar. Que o nosso educando compreenda e produza bons textos e seja capaz de expô-los com clareza, síntese e lógica são importantes legados que a instituição de ensino pode oferecer.

Todavia, recorrentes e até enfadonhas – embora cruelmente verdadeiras – são as notícias do baixo desempenho dos nossos discentes nas avaliações nacionais em comparação com o de outros países. No último Pisa, tendo sido avaliados adolescentes de 15 e 16 anos em 70 países, o Brasil se manteve na 64.^a posição no conjunto de Matemática, Ciências e Português. No mais recente Ideb do Ensino Médio, a nota média foi 3,7, numa escala que vai até 10. No último Saeb, apenas 9,1% dos concluintes do Ensino Médio apresentaram aprendizado adequado dos conteúdos de Matemática. E na prova do Enem de três anos atrás, composta de 45 questões de Matemática com 5 alternativas, o acerto médio foi de 13 questões, quando a probabilidade de acerto no chute é de 9.

Todas essas provas priorizam o raciocínio lógico e a interpretação de textos, contrapontos à predominância do nosso ensino hermético, conteudista, minimamente interdisciplinar ou contextualizado. Se os governantes e nós, educadores, temos responsabilidades pelo status quo de nossa combalida educação, há de se compartilhá-la com uma boa parte dos estudantes, pois inércia, apatia e indisciplina contagiam todo o ambiente escolar.

Permita-me uma analogia com a atividade física: acordar às 6 horas para nadar, puxar ferro numa academia ou caminhar pode não ser nada prazeroso, mas depois de 30 minutos... ah, sim, advém a sensação de bem-estar provocada pela serotonina.

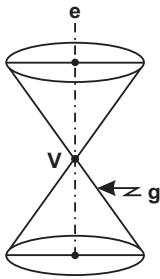
Assim como os músculos se fortalecem com os exercícios físicos, igualmente novas redes neurais se formam por meio de



atividades que exijam raciocínio, abstração, análise crítica. Destarte, o cérebro produz uma proteína denominada neurotrofina que induz o desenvolvimento dos neurônios. Com isso, um ciclo virtuoso se estabelece, desencadeando a formação de novas sinapses que, por sua vez, retardam os males degenerativos, pois uma mente preguiçosa é oficina de doenças e do afastamento de um bom convívio social.

Do Autor

1. SEÇÕES CÔNICAS



À guisa de apresentação consideremos um cone circular reto de duas folhas, de vértice V e eixo (e). Qualquer reta que passa pelo vértice e está sobre a superfície cônica chama-se geratriz (g).

A palavra cônica (ou seção cônica) procede do fato que tal curva é obtida por meio do corte de um plano α sobre o cone circular reto.

Isto posto, quando o plano α for secante ao cone e não contiver o vértice, ter-se-á como seção cônica uma:

- circunferência
- parábola
- elipse
- hipérbole

Melhor ilustram as figuras abaixo:

<p>A diagram of a double cone with a horizontal plane α cutting it perpendicular to the axis e. The resulting cross-section is a shaded circle.</p>	<p>A diagram of a double cone with a plane α cutting it parallel to one of its generators. The resulting cross-section is a shaded parabola.</p>	<p>A diagram of a double cone with a plane α cutting it at an angle to the axis e and not parallel to a generator. The resulting cross-section is a shaded ellipse.</p>	<p>A diagram of a double cone with a plane α cutting it parallel to the axis e. The resulting cross-section is a shaded hyperbola.</p>
<p>Circunferência: quando o plano α for perpendicular ao eixo (e) do cone.</p>	<p>Parábola: quando o plano α for paralelo a uma geratriz do cone.</p>	<p>Elipse: quando o plano α for oblíquo ao eixo e não paralelo a uma geratriz. O plano corta apenas uma das folhas do cone.</p>	<p>Hipérbole: quando o plano α for paralelo ao eixo do cone.</p>

No entanto, se o plano passa pelo vértice V do cone, ter-se-á uma **cônica degenerada**. O assunto em epígrafe merecerá um tratamento específico no item 6 do presente capítulo.

2. EQUAÇÃO COMPLETA DO 2.º GRAU

Chamamos de **cônica** ao conjunto de pontos do plano cujas coordenadas cartesianas satisfazem uma equação do 2.º grau com duas variáveis:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Esta equação se diz completa quando todos os coeficientes A, B, C, D, E, F são não nulos. Destarte, a equação contém:

- três termos do 2.º grau: Ax^2 , Bxy e Cy^2 ;
- dois termos do 1.º grau: Dx e Ey ;
- um termo independente: F .

Detêmo-nos no termo **Bxy**:

I) Se $B \neq 0$, o eixo focal da cônica é oblíquo aos eixos cartesianos.

Para que a equação fique desprovida do termo em xy faz-se mister que se aplique uma rotação de eixos de amplitude θ .

II) Se $B = 0$, a equação do 2.º grau se reduz à forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

O eixo focal da cônica é paralelo aos eixos cartesianos. Efetuando uma translação de eixos obtemos o seu centro ou o seu vértice (para as cônicas não degeneradas).

3. DISCRIMINANTE DA EQUAÇÃO DO 2.º GRAU

A equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (*) pode ser identificada como uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola, conforme o valor do discriminante $B^2 - 4AC$.

Se	A eq. (*) representa
$B^2 - 4AC = 0$	Uma parábola
$B^2 - 4AC > 0$	Uma hipérbole
$B^2 - 4AC < 0$	Uma elipse

N.B.: Rememoramos que a equação (*) representa uma circunferência se $B = 0$ e $A = C$.

4. ORDEM DAS TRANSFORMAÇÕES

Considere a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Nosso escopo é obter a equação canônica da cônica. Para tanto, deve-se eliminar termos do 1.º grau e/ou termos do 2.º grau e por conseguinte aplicar-se-á **translação** e/ou **rotação** de eixos.

Na prática, com o intuito de tornar menos laboriosos os cálculos, convém adotar a seguinte ordem das transformações.

Se $B^2 - 4AC \neq 0$ (elipse ou hipérbole)	1.º translação	2.º rotação
Se $B^2 - 4AC = 0$ (parábola)	1.º rotação	2.º translação

5. REVISANDO

Fulcrados nos capítulos anteriores, ao efetuar-se uma **translação** e/ou **rotação** de eixos na equação (*) recai-se nas **equações canônicas** das cônicas:

Parábola	Elipse	Hipérbole
$y^2 = 2px$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
ou	ou	ou
$x^2 = 2py$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

a) **Translação de eixos:** na equação (*) pode-se eliminar os termos do 1.º grau (termos Dx e Ey) pela translação de eixos. Neste caso, os coeficientes A , B e C (dos termos do 2.º grau) não se alteram.

Fórmulas de translação de eixos:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + x' \\ y &= y_0 + y'\end{aligned}$$

b) **Rotação de eixos:** Na equação (*) pode-se suprimir os termos do 2.º grau (termos Ax^2 , Bxy e Cy^2) pela rotação de eixos. Neste caso, o termo independente F permanece imutável.

Em particular para o cálculo do ângulo θ que elimina o **termo em xy** é mais prática a aplicação da fórmula:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A - C} \quad (0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$$

N.B.: Se $A = C$, então $\theta = 45^\circ$.

Fórmulas de rotação de eixos:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta \\ y &= x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta\end{aligned}$$

Exemplos Resolvidos

"Em cada coração humano há um tigre, um porco e um rouxinol."

Ambrose G. Bierce (1842-1914), jornalista e escritor norte americano.

01. Dada a equação $x^2 + 3xy + y^2 - 10x - 10y + 5 = 0$ pede-se para:

- identificar a cônica;
- achar o centro (ou o vértice);
- calcular a equação canônica;
- construir o gráfico.

RESOLUÇÃO:

- a) Identificação da cônica: $B^2 - 4AC = (3)^2 - 4(1)(1) = 5 > 0$
 A cônica é uma hipérbole.

Obs.:

Ordem das transformações:

Se $B^2 - 4AC = 5 \neq 0$ $\begin{cases} 1) \text{ translação} \\ 2) \text{ rotação} \end{cases}$

b) Cálculo do centro:

Fórmulas de translação:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}$$

Substituindo na equação dada:

$$(x_0 + x')^2 + 3(x_0 + x')(y_0 + y') + (y_0 + y')^2 - 10(x_0 + x') - 10(y_0 + y') + 5 = 0$$

* fazendo o coeficiente de $x' = 0$

$$2x_0 + 3y_0 - 10 = 0$$

* fazendo coeficiente de $y' = 0$

$$3x_0 + 2y_0 - 10 = 0$$

Resolvendo o sistema acima obtém-se $x_0 = 2$ e $y_0 = 2$.

O centro da cônica é $O' = (2, 2)$

Como na translação para a nova origem $O' = (2, 2)$ são elimina-

dos os termos do 1.º grau, resulta na equação:

$$x'^2 + 3x'y' + y'^2 + F' = 0, \text{ onde}$$

$$F' = (2)^2 + 3(2)(2) + (2)^2 - 10(2) - 10(2) + 5 = -15$$

Destarte, pela translação a equação dada se transforma numa equação do tipo:

$$x''^2 + 3x''y'' + y''^2 - 15 = 0$$

c) Cálculo da equação canônica:

Na equação acima deve-se eliminar o termo em $x'y'$:

$$\text{Como } A = C \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

Fórmulas de rotação:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x'' \cos 45^\circ - y'' \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} (x'' - y'') \\ y' &= x'' \sin 45^\circ + y'' \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} (x'' + y'') \end{aligned} \right\} \textcircled{2}$$

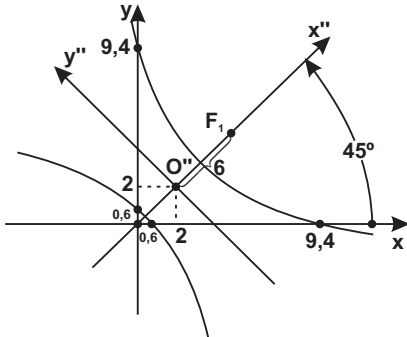
Levando $\textcircled{2}$ em $\textcircled{1}$:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\sqrt{2}}{2} (x'' - y'') \right]^2 + 3 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (x'' - y'') \right] \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (x'' + y'') \right] + \\ &+ \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (x'' + y'') \right]^2 - 15 = 0 \end{aligned}$$

Efetando os produtos e as somas:

$$5x''^2 - y''^2 = 30 \quad \text{ou}$$

$$\frac{x''^2}{6} - \frac{y''^2}{30} = 1 \quad (\text{eq. canônica da hipérbole})$$



d) Gráfico:

Da equação canônica da hipérbole, infere-se que o eixo focal está sobre o eixo x'' e que

$$a = \sqrt{6} \quad \text{e} \quad b = \sqrt{30}.$$

Cálculo de c :

$$c^2 = a^2 + b^2 = 6 + 30 = 36 \Rightarrow c = 6.$$

e) Interseção da hipérbole com os eixos cartesianos:

I) Interseção com o eixo x

Na equação dada faz-se $y = 0$

$$x^2 - 10x + 5 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm 4\sqrt{5}}{2}$$

donde: $x_1 = 0,6$ e $x_2 = 9,4$

II) Interseção com o eixo y

Na equação dada faz-se $x = 0$

$$y^2 - 10y + 5 = 0$$

$$y = \frac{10 \pm 4\sqrt{5}}{2}$$

donde: $y_1 = 0,6$ e $y_2 = 9,4$

02. Dada a equação $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 38x - 34y + 101 = 0$, pede-se para:

- identificar a cônica;
- achar o centro (ou o vértice);
- calcular a equação canônica;
- construir o gráfico.

RESOLUÇÃO:

a) identificação da cônica:

$$B^2 - 4AC = (-24)^2 - 4(16)(9) = 0$$

A cônica é uma parábola.

Obs.:

Ordem das operações:

$$\text{Se } B^2 - 4AC = 0 \begin{cases} 1) \text{ rotação} \\ 2) \text{ translação} \end{cases}$$

b) rotação dos eixos:

$$\text{tg } 2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{-24}{16 - 9} = \frac{-24}{7}$$

* cálculo da $\text{tg } \theta$:

$$\text{tg } 2\theta = \frac{2 \text{tg } \theta}{1 - \text{tg}^2 \theta} = \frac{-24}{7}$$

$$\text{logo: } 12 \text{tg}^2 \theta - 7 \text{tg } \theta - 12 = 0$$

Raízes:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{4}{3} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{-3}{4}$$

Adotando a solução positiva:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{4}{3} \quad (\theta \cong 53^\circ)$$

* Cálculo da $\sec \theta$:

$$\sec^2 \theta = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

$$\sec \theta = \frac{5}{3} \quad (\text{solução positiva})$$

* Cálculo do $\cos \theta$:

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} = \frac{1}{\frac{5}{3}}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{5}$$

* Cálculo do $\operatorname{sen} \theta$:

$$\operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{4}{5}$$

* fórmulas de rotação:

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta = \frac{3x' - 4y'}{5} \\ y = x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta = \frac{4x' + 3y'}{5} \end{cases}$$

* substituindo as fórmulas de rotação na equação dada:

$$\begin{aligned} & 16 \left(\frac{3x' - 4y'}{5} \right)^2 - 24 \left(\frac{3x' - 4y'}{5} \right) \left(\frac{4x' + 3y'}{5} \right) + 9 \left(\frac{4x' + 3y'}{5} \right)^2 - \\ & - 38 \left(\frac{3x' - 4y'}{5} \right) - 34 \left(\frac{4x' + 3y'}{5} \right) + 101 = 0 \end{aligned}$$

Efetuando-se:

$$25y'^2 - 50x' + 10y' + 101 = 0 \quad \textcircled{1}$$

c) translação de eixos:

Obs.:

Para se obter a equação canônica da parábola (tipo $y^2 = 2px$), na equação $\textcircled{1}$ deve-se suprimir o termo em y' e o termo independente.

* fórmulas de translação:

$$\begin{cases} x' = x_0 + x'' \\ y' = y_0 + y'' \end{cases}$$

* levando as fórmulas de translação na eq. $\textcircled{1}$:

$$25(y_0 + y'')^2 - 50(x_0 + x'') + 10(y_0 + y'') + 101 = 0 \quad \textcircled{2}$$

ou

$$25y''^2 - 50x'' + (50y_0 + 10)y'' + 25y_0^2 - 50x_0 + 10y_0 + 101 = 0$$

* fazendo o coeficiente de $y'' = 0$

$$50y_0 + 10 = 0 \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{5} \quad (\text{sobre o eixo } y')$$

* fazendo o termo independente = 0 e considerando $y_0 = -\frac{1}{5}$

$$25\left(-\frac{1}{5}\right)^2 - 50x_0 + 10\left(-\frac{1}{5}\right) + 101 = 0 \Rightarrow x_0 = 2 \quad (\text{sobre o eixo } x')$$

Isto posto, a parábola tem vértice em $V = \left(2, -\frac{1}{5}\right)$ em relação ao sistema $x'Oy'$.

d) equação canônica:

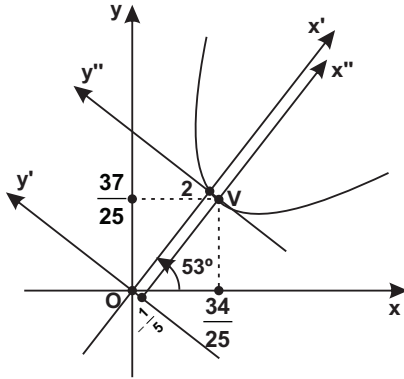
Levando $V = \left(2, -\frac{1}{5}\right)$ em $\textcircled{2}$:

$$25y''^2 - 50x'' = 0$$

ou

$$y''^2 = 2x'' \quad (\text{equação canônica})$$

e) gráfico:



f) interseção com os eixos cartesianos:

I. interseção com o eixo y

Na equação dada faz-se $x = 0$:

$$9y^2 - 34y + 101 = 0$$

Não há raízes reais, portanto a parábola não corta o eixo.

II. Interseção com o eixo x

Na equação dada faz-se $y = 0$:

$16x^2 - 38x + 101 = 0$, equação do 2.º grau desprovida de raízes reais e conseqüentemente a parábola não corta o eixo x.

g) cálculo do vértice $V = \left(2, -\frac{1}{5}\right)$ em relação ao sistema xOy :

Fórmulas de rotação:

$$x = \frac{3x' - 4y'}{5} = \frac{3(2) - 4\left(-\frac{1}{5}\right)}{5} = \frac{34}{25}$$

$$y = \frac{4x' + 3y'}{5} = \frac{4(2) + 3\left(-\frac{1}{5}\right)}{5} = \frac{37}{25}$$

Então:

$$V = \left(\frac{34}{25}, \frac{37}{25}\right)$$

Exercícios

"Não há coisa mais fácil que enganar um homem de bem: muito crê quem nunca mente e confia muito quem nunca engana."

Baltasar Gracián y Morales (1601-1658), escritor espanhol.

Dada a equação da cônica, pede-se para:

- identificar a cônica;
- achar o centro ou o vértice;
- calcular a equação canônica;
- construir o gráfico;
- pontos de interseção com os eixos cartesianos.

01. $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$

Resp.:

- a) elipse

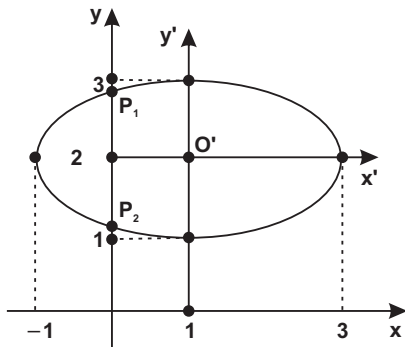
Obs.:

Como não há termo em xy na equação dada, basta a translação.

- b) $O' = (1, 2)$

c) $\frac{x'^2}{4} + y'^2 = 1$

- d) gráfico:



- e) pontos de interseção com o eixo x : não há.
Pontos de interseção com o eixo y :

$$P_1 = \left(0, \frac{4 + \sqrt{3}}{2} \right) \text{ e } P_2 = \left(0, \frac{4 - \sqrt{3}}{2} \right)$$

02. $x^2 - 4y^2 + 4x + 6y + 1 = 0$

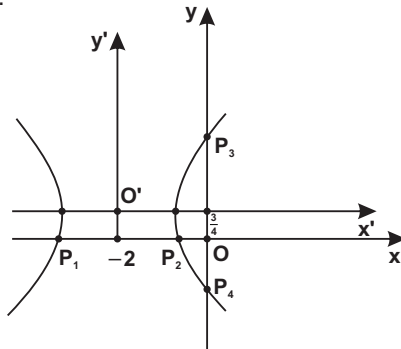
Resp.:

a) hipérbole (não há termo em xy : basta a translação)

b) $O' = \left(-2, \frac{3}{4}\right)$

c) $\frac{x'^2}{3} - \frac{y'^2}{3} = 1$

d) gráfico:



e) pontos de interseção com o eixo x :

$P_1 = (-2 - \sqrt{2}, 0)$ e $P_2 = (-2 + \sqrt{2}, 0)$

pontos de interseção com o eixo y :

$P_3 = \left(0, \frac{3 + \sqrt{13}}{4}\right)$ e $P_4 = \left(0, \frac{3 - \sqrt{13}}{4}\right)$

03. $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 14x - 20y - 19 = 0$

Resp.:

a) elipse

b) $O' = (1, 1)$

SUGESTÃO:

Aplica-se as fórmulas de translação na equação dada e impõe-se que sejam nulos os coeficientes de x' e y' . Destarte, a equação dada, após uma translação de eixos, se reduz a:

$5x'^2 + 4x'y' + 8y'^2 - 36 = 0$ (*)

$$c) \frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{9} = 1$$

SUGESTÃO:

Para se eliminar o termo em xy , faz-se mister calcular o ângulo θ :

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{-4}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = 2 \quad (0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ) \text{ e}$$

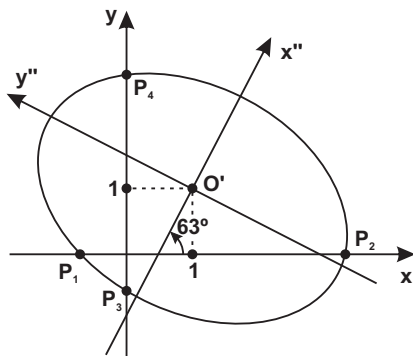
$$\operatorname{sen} \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ e } \operatorname{cos} \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (\theta \cong 63^\circ)$$

Fórmulas de rotação :

$$\left. \begin{aligned} x' &= x'' \operatorname{cos} \theta - y'' \operatorname{sen} \theta = \frac{x'' - 2y''}{\sqrt{5}} \\ y' &= x'' \operatorname{sen} \theta + y'' \operatorname{cos} \theta = \frac{2x'' + y''}{\sqrt{5}} \end{aligned} \right\} (**)$$

Levando-se (**) em (*) obtém-se a equação canônica.

d) gráfico: a equação canônica fornece $a = 3$ e $b = 2$ (eixo focal sobre o eixo y'').



e) **pontos de interseção com o eixo x:**

fazendo $y = 0$ na equação dada:

$$5x^2 - 14x - 19 = 0$$

$$\text{raízes } \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3,8 \end{cases}$$

Então $P_1 = (-1; 0)$ e $P_2 = (3,8; 0)$

pontos de interseção com o eixo y:fazendo $x = 0$ na equação dada:

$$8y^2 - 20y - 19 = 0$$

$$\text{raízes } \begin{cases} y_1 = -0,4 \\ y_2 = 2,9 \end{cases}$$

Então $P_3 = (0; -0,4)$ e $P_4 = (0; 2,9)$

$$04. x^2 + 4xy + y^2 = 16$$

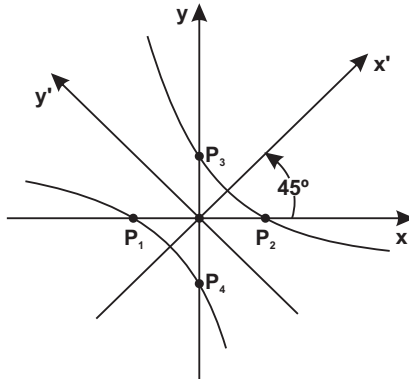
Resp.:

a) hipérbole

b) $O' = (0,0)$ **Obs.:**Cálculo do ângulo de rotação para se eliminar o termo em xy :Com $A = C \Rightarrow \theta = 45^\circ$

$$c) \frac{x'^2}{\frac{16}{3}} - \frac{y'^2}{16} = 1$$

d) gráfico:

e) **pontos de interseção com o eixo x:** $P_1 = (-2, 0)$ e $P_2 = (2, 0)$ **pontos de interseção com o eixo y:** $P_3 = (0, 2)$ e $P_4 = (0, -2)$

05. $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 4\sqrt{2}x + 12\sqrt{2}y + 8 = 0$

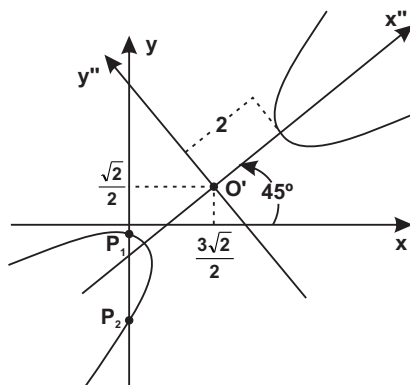
Resp.:

a) hipérbole

b) $O' = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ e $\theta = 45^\circ$

c) $\frac{x''^2}{4} - \frac{y''^2}{1} = 1$

d) gráfico: a equação canônica fornece $a = 2$ e $b = 1$.



e) pontos de interseção com o eixo y:

$P_1 = \left(\frac{-6\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}{3}, 0 \right)$ e $P_2 = \left(\frac{-6\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{3}, 0 \right)$

pontos de interseção com o eixo x: não há.

06. $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 4\sqrt{3}x - 4y - 12 = 0$

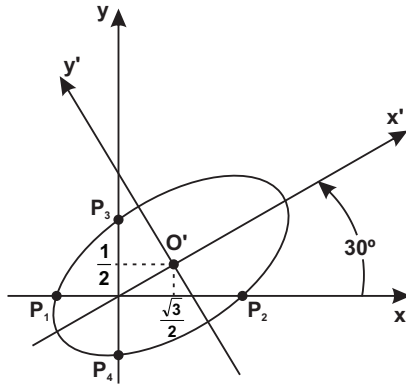
Resp.:

a) elipse

b) $O' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$ e $\theta = 30^\circ$

c) $\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{1} = 1$

d) gráfico: obtém-se da equação canônica $a = 2$ e $b = 1$.



e) pontos de interseção com o eixo x:

$$P_1 = \left(\frac{2\sqrt{3} + 4\sqrt{6}}{7}, 0 \right) \text{ e } P_2 = \left(\frac{2\sqrt{3} - 4\sqrt{6}}{7}, 0 \right)$$

pontos de interseção com o eixo y:

$$P_3 = \left(0, \frac{2 + 4\sqrt{10}}{13} \right) \text{ e } P_4 = \left(0, \frac{2 - 4\sqrt{10}}{13} \right)$$

07. $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$

Resp.:

a) elipse

b) não havendo na equação dada termos do 1.º grau, a elipse tem o centro na origem $O = (0, 0)$.

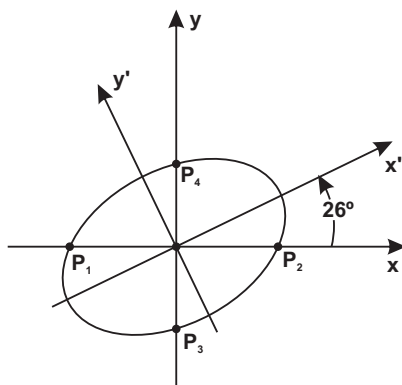
Rotação:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ e}$$

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (\theta \cong 26^\circ)$$

c) equação canônica: $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$

d) gráfico: da equação canônica: $a = 3$ e $b = 2$



e) a elipse intercepta o eixo x nos pontos $P_1 = \left(-\frac{6}{\sqrt{5}}, 0\right)$ e

$P_2 = \left(\frac{6}{\sqrt{5}}, 0\right)$ e o eixo y nos pontos $P_3 = \left(0, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ e

$P_4 = \left(0, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

08. $x^2 + 2xy + y^2 + 8x - 8y + 16 = 0$

Resp.:

a) parábola

SUGESTÃO:

Ordem das operações $B^2 - 4AC = 0$ $\begin{cases} 1) \text{ rotação} \\ 2) \text{ translação} \end{cases}$

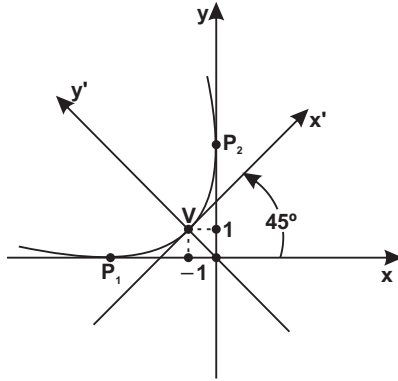
Rotação:

Como $A = C \Rightarrow \theta = 45^\circ$

b) equação canônica: $x' = 4\sqrt{2}y'$

c) coordenadas do vértice no sistema xOy : $V = (-1, 1)$

d) gráfico:



e) a parábola tangencia o eixo x no ponto $P_1 = (-4, 0)$ e o eixo y no ponto $P_2 = (0, 4)$.

6. CÔNICAS DEGENERADAS

a) Apresentação:

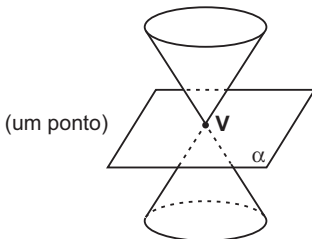
Reiteramos que quando o plano intercepta o cone e não passa pelo seu vértice, obtém-se as cônicas regulares (ou não degeneradas):

- circunferência
- elipse
- parábola
- hipérbole

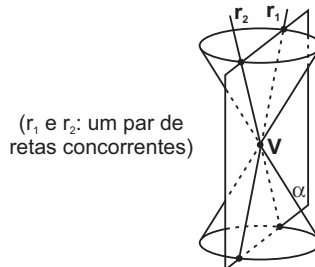
Apõem-se, as **cônicas degeneradas** que são obtidas quando em particular o plano corta o cone em seu vértice V .

Destarte, são cônicas degeneradas:

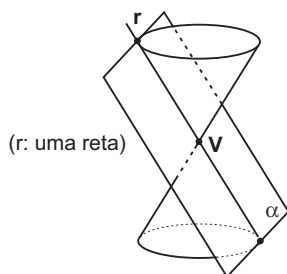
- **O PONTO:** quando o plano α tiver em comum com o cone apenas o vértice V . Trata-se de uma elipse degenerada.



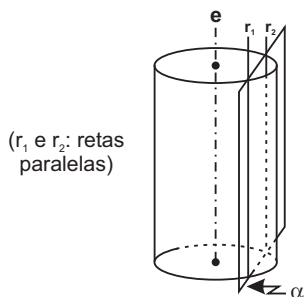
- **UM PAR DE RETAS CONCORRENTES:** quando o plano α contiver o vértice e duas geratrizes do cone. É uma hipérbole degenerada.



- **UMA RETA:** quando o plano contiver o vértice e uma geratriz do cone. O plano α tangencia o cone. Figura-se como parábola degenerada.



- **UM PAR DE RETAS PARALELAS:** num caso particular obter-se-á duas retas paralelas quando da interseção de uma **superfície cilíndrica circular** (considerada uma **superfície cônica de vértice impróprio**) por um plano α paralelo ao seu eixo.



Obs.:

Se o plano α tangenciar a superfície cilíndrica obter-se-á uma reta.

b) Reconhecimento de uma cônica degenerada:

Dada a equação completa do 2.º grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

$$\text{Seja } \Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}$$

Se:

I. $\Delta \neq 0$ **ter-se-á uma cônica regular**

(circunferência, elipse, parábola, hipérbole)

II. $\Delta = 0$ **ter-se-á uma cônica degenerada**

(um ponto, um par de retas concorrentes, uma reta ou um par de retas paralelas)

Fulcrados na presente exposição, enfatize-se antes de identificar se uma cônica é uma elipse, parábola ou hipérbole através do discriminante $B^2 - 4AC$, faz-se mister o cálculo do determinante Δ .

Em resumo:

$$\text{Se } B^2 - 4AC = 0 \begin{cases} \Delta \neq 0 \rightarrow \text{parábola} \\ \Delta = 0 \rightarrow \text{uma reta ou um par} \\ \text{de retas paralelas.} \end{cases}$$

$$\text{Se } B^2 - 4AC > 0 \begin{cases} \Delta \neq 0 \rightarrow \text{hipérbole} \\ \Delta = 0 \rightarrow \text{um par de retas concorrentes.} \end{cases}$$

$$\text{Se } B^2 - 4AC < 0 \begin{cases} \Delta \neq 0 \rightarrow \text{elipse} \\ \Delta = 0 \rightarrow \text{um ponto} \end{cases}$$

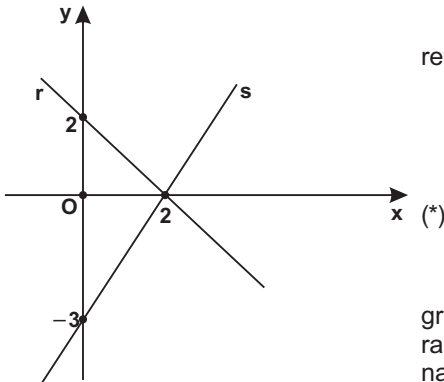
Exercícios Resolvidos

"O único pecado é a mediocridade."

Marta Grayham

1. Considere as retas abaixo figuradas:

$$\begin{cases} r: x + y - 2 = 0 \\ s: 3x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$$



Fazendo o produto das duas retas:

$$(x + y - 2)(3x - 2y - 6) = 0$$

Efetuando-se:

$$3x^2 + xy - 2y^2 - 12x - 2y + 12 = 0$$

Esta equação completa do 2.º grau é uma cônica, dita degenerada, e ipso facto o seu determinante Δ deve ser nulo.

De fato, a equação (*) fornece os coeficientes $A = 3$, $B = 1$, $C = -2$, $D = -12$, $E = -2$ e $F = 12$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -12 \\ 1 & -4 & -2 \\ -12 & -2 & 24 \end{vmatrix} = 0$$

Reciprocamente, dada a equação

$3x^2 + xy - 2y^2 - 12x - 2y + 12 = 0$ (*) pede-se para identificar a cônica e calcular as equações das retas.

RESOLUÇÃO:

Uma vez que $\Delta = 0$ e $B^2 - 4AC = 1 - 4(3)(-2) > 0$ corrobora-se que a equação (*) representa um par de retas concorrentes.

Cálculo das equações das retas concorrentes:

Ordenando a equação (*) segundo a variável x (poder-se-ia optar pela variável y)

$$3x^2 + (y - 12)x - 2y^2 - 2y + 12 = 0$$

Aplicando-se a fórmula de Bháskara (geômetra hindu, séc. XII):

$$x = \frac{-(y - 12) \pm \sqrt{(y - 12)^2 - 4 \cdot 3(-2y^2 - 12y + 12)}}{6}$$

ou

$$x = \frac{-(y - 12) \pm 5y}{6}$$

Adotando o sinal negativo e positivo obtém-se respectivamente:

$$r: x + y - 2 = 0 \quad (\text{Resp.})$$

$$s: 3x - 2y - 6 = 0$$

2. Identificar a cônica $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

RESOLUÇÃO:

a) Cálculo do determinante Δ :

A equação da cônica fornece $A = 1$, $B = 2$, $C = 1$, $D = -2$, $E = -2$ e $F = 1$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

b) Cálculo do discriminante:

$$B^2 - 4AC = (2)^2 - 4(1)(1) = 0$$

A cônica representa um reta ou um par de retas paralelas.

c) Cálculo da(s) equação(ões) da(s) reta(s):

Ordenando a equação segundo a variável x (ou poder-se-ia optar por y): $x^2 + (2y - 2)x + y^2 - 2y + 1 = 0$

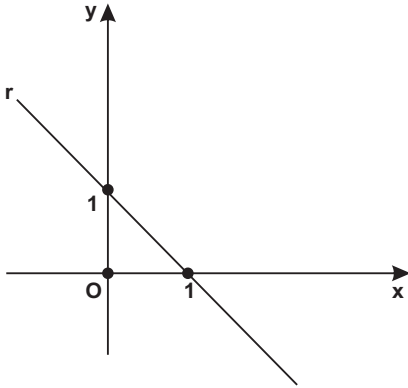
Aplicando-se a fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-(2y - 2) \pm \sqrt{(2y - 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (y^2 - 2y + 1)}}{2}$$

ou

$$x = \frac{-(2y - 2) \pm 0}{2} \quad \text{ou} \quad r: x + y - 1 = 0 \quad (\text{Resp.})$$

d) gráfico:



N.B.: Uma vez que se efetue o produto:

$$(x + y - 1)(x + y - 1) = 0$$

obter-se-á a equação da cônica dada:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

3. Identificar a cônica $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y + 2 = 0$.

RESOLUÇÃO:

a) Cálculo do determinante Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

b) Cálculo do discriminante:

$$B^2 - 4AC = (2)^2 - 4(1)(1) = 0$$

A cônica representa uma reta ou um par de retas paralelas.

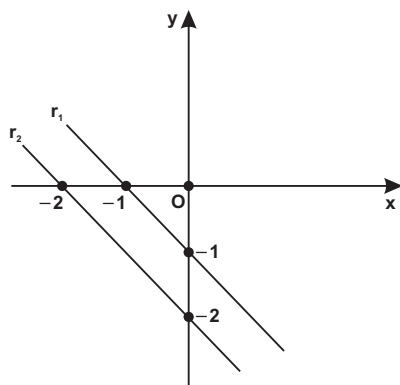
c) Cálculo da(s) equação(ões) da(s) reta(s)

Ordenando a equação da cônica dada segundo uma das variáveis e aplicando a fórmula de Bháskara obtêm-se duas retas paralelas:

$$r_1: x + y + 1 = 0 \quad (\text{Resp.})$$

$$r_2: x + y + 2 = 0$$

d) gráfico



4. Identificar a cônica $2x^2 + 2xy + y^2 + 8x + 6y + 10 = 0$

RESOLUÇÃO:

a) Cálculo do determinante Δ :

A equação da cônica fornece $A = 2$, $B = 2$, $C = 1$, $D = 8$, $E = 6$ e

$F = 10$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 6 \\ 8 & 6 & 20 \end{vmatrix} = 0$$

b) Cálculo do discriminante

$$B^2 - 4AC = (2)^2 - 4(2)(1) < 0$$

A cônica representa um ponto.

c) Cálculo das coordenadas do ponto:

Fórmulas de translação:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}$$

Substituindo as fórmulas de translação na equação da cônica:

$$2(x_0 + x')^2 + 2(x_0 + x')(y_0 + y') + (y_0 + y')^2 + 8(x_0 + x') + 6(y_0 + y') + 10 = 0$$

* Fazendo o coeficiente de $x' = 0$

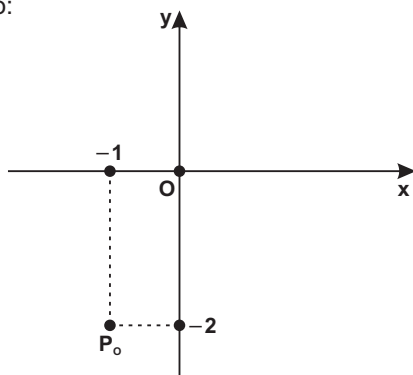
$$4x_0 + 2y_0 + 8 = 0$$

* Fazendo o coeficiente de $y' = 0$

$$2x_0 + 2y_0 + 6 = 0$$

O sistema acima fornece $x_0 = -1$ e $y_0 = -2$. Isto posto, o ponto $P_0 = (-1, -2)$ representa a cônica dada.

d) Gráfico:



Exercícios

A mágoa que tens dentro de ti é um fardo pesado e que somente a ti cabe a tarefa de carregá-lo. Vale a pena?

Identificar as cônicas abaixo transcritas e quando degeneradas pede-se a(s) equação(ões) resultante(s).

01. $2x^2 + xy - y^2 + 7x + y + 6 = 0$

Resp.: um par de retas interceptantes:
 $x + y + 2 = 0$ e $2x - y + 3 = 0$

02. $25x^2 - 30xy + 9y^2 + 10x - 6y + 1 = 0$

Resp.: uma reta: $5x - 3y + 1 = 0$

03. $3x^2 + 3y^2 - 10xy - 2x - 14y - 13 = 0$

Resp.: hipérbole.

04. $15x^2 + 20xy + 7x - 4y - 2 = 0$

Resp.: um par de retas concorrentes:
 $5x - 1 = 0$ e $3x + 4y + 2 = 0$

05. $16x^2 + 9y^2 - 24xy - 68x - 74y + 41 = 0$

Resp.: parábola

06. $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 26 = 0$

Resp.: um ponto $P = (-1, -5)$

07. $25x^2 - 14xy + 25y^2 + x + 3y - 3 = 0$

Resp.: uma elipse.

08. $4x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 3y + 2 = 0$

Resp.: duas retas paralelas:
 $2x + y + 1 = 0$ e $2x + y + 2 = 0$

09. Pedir-se o valor de k para que a equação $x^2 + kxy + 2y^2 - x - 2 = 0$ represente duas retas concorrentes.

Resp.: $k = \pm 3$

10. $x^2 + 2xy + 2y^2 + 6y + 9 = 0$

Resp.: um ponto $P_o = (3, -3)$

11. $5x^2 - 4xy + y^2 - 16x + 4y + 20 = 0$

Resp.: um ponto $P_o = (4, 6)$

HUMOR

Após quase uma dezena de bons livros publicados na área da Matemática, encontramos em Curitiba o amigo Nilson J. Machado, no lançamento do belíssimo livro de poesia – Plantares.

Sentindo a nossa surpresa pela mudança de área, devolveu:

- Meu caro, depois dos 50 anos, da cintura para cima, poesia; da cintura para baixo, só prosa.

VOCÊ PODE ME VENDER UMA HORA DO SEU TEMPO?

Todo dia, o mesmo ritual: o pai extenuado chega à noite em casa, após um duro dia de trabalho. Seu filho, com os olhos cheios de admiração, abraça-o, trocam algumas palavras sobre a escola e se despedem com beijos na face, o boa-noite e o durma-com-os-anjos.

Certo dia, com a voz tímida, o garoto perguntou ao pai que acaba de chegar:

– Papai, quanto você ganha por hora?

O pai, surpreso, desconversa. O filho insiste:

– Papai, quanto você ganha por hora?

O pai se aflige com a pergunta. Passado algum tempo, dirige-se ao quarto do filho e o encontra deitado.

– Filho, você está dormindo?

– Não, papai – responde o garoto.

– Querido, eu ganho doze reais por hora.

O filho levanta-se da cama, abre a gaveta e conta doze notas de um real. Abraça o pai com ternura e, com os olhos cheios de lágrimas, pergunta:

– Você pode me vender uma hora do seu tempo?

Esta conhecida, singela – e para alguns piegas – história enseja a meditação sobre a disponibilidade de tempo para os filhos.

Mais cedo do que se pensa, os filhos compreenderão a árdua luta pela sobrevivência profissional; o necessário cumprimento de suas obrigações no importante papel de provedores; e que a dedicação ao trabalho é fator de realização profissional, modelo e exemplo de responsabilidade.

Busca-se, evidentemente, a prevalência do bom senso, da medida, do equilíbrio entre a vida profissional e a vida social e familiar.

Nesse contexto, importa mais a qualidade do afeto do que a quantidade de tempo disponível aos filhos.

O abraço afetuoso, o beijo estalado, a imposição de limites, o diálogo objetivo e adequado à idade, o acompanhamento do rendimento escolar, a presença nos momentos de lazer ou doença e a transmissão, pela palavra e pelo exemplo, de valores éticos e de cidadania podem ser praticados diariamente – com ênfase nos finais de semana – por pais que trabalhem cerca de oito horas por dia.

Gutemberg B. Macedo, em seu excelente livro *Fui demitido: e agora?* (Ed. Maltese) faz seu depoimento:

"Conheço executivos bem-sucedidos que mantêm uma vida balanceada. São bons profissionalmente e, até prova em contrário, bons maridos, bons pais, bons líderes e bons cidadãos. O segredo? Saber dividir, compartimentar esses diferentes papéis. É preciso parar para refletir com profundidade. A vida é uma bênção de Deus. Desequilibrá-la é destruí-la. E destruí-la é uma espécie de estupro da própria divindade. Se Ele descansou quem afinal você pensa que é para querer ir além?"

Segurança do amor dos pais: este é o fulcro do relacionamento. A paternidade responsável é uma missão e um dever a que não se pode furtar. No entanto, vêem-se nas escolas filhos órfãos de pais vivos. E, na maioria das vezes, falta de tempo é apenas uma desculpa para sua omissão.

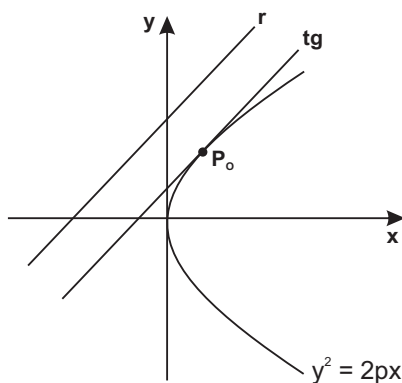
A vida profissional, apesar de suas elevadas exigências, pode muito bem ser ajustada a uma vida particular equilibrada. É uma questão de ênfase e dosagem do tempo.

Do autor

Equação da Tangente a uma Cônica

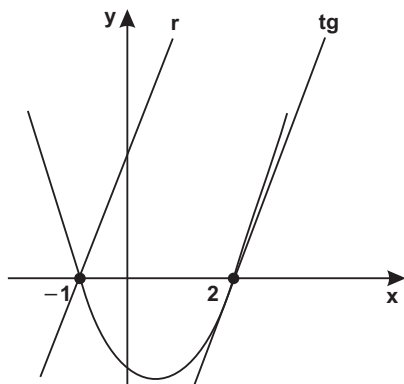
Para se obter a tangente a uma cônica, escolhemos a parábola para efeito de exposição e prática. Raciocínio análogo pode ser adotado para a elipse, para a hipérbole e para a circunferência. Há três tipos de problemas:

1.º PROBLEMA: A TANGENTE É PARALELA A UMA RETA DADA



Exemplo:

Calcular a reta tangente à parábola $y = x^2 - x - 2$ e que seja paralela à reta: $3x - y + 3 = 0$.



Pede-se para calcular a equação da tangente à parábola $y^2 = 2px$ e que seja paralela à reta: $y = mx + n$.

A equação da tangente é $y = mx + k$, onde k é a constante a ser determinada. Substitui-se $y = mx + k$ na equação da parábola, recaindo-se numa equação do 2.º grau.

Para que a reta e a parábola tenham apenas um ponto em comum, a equação do 2.º grau deve ter apenas uma solução. Destarte, impõe-se que o discriminante (Δ) da equação do 2.º grau seja nulo, obtendo-se k .

RESOLUÇÃO:

a) equação reduzida de r : $y = 3x + 3$

b) equação da tangente: $y = 3x + k$ ①

c) levando ① na equação da parábola:

$$(3x + k) = x^2 - x - 2$$

desenvolvendo e ordenando:

$$x^2 - 4x - 2 - k = 0$$

d) impondo a condição de tangência:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

$$(-4)^2 - 4(1)(-2 - k) = 0 \Rightarrow k = -6$$

e) resposta: $tg: y = 3x - 6$

Exercícios

***“Todo o povo precisa de liderança.
Ainda que não acredite nela.”***

Ernest Junger, filósofo alemão.

01. Equação da tangente à parábola $y^2 - 16x = 0$ e paralela à reta $2x - y + 6 = 0$.

$$\text{Resp.: } 2x - y + 2 = 0$$

02. Obter as equações das tangentes à elipse $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ e que sejam paralelas à reta $y = x$.

$$\text{Resp.: } y = x \pm \sqrt{5}$$

03. Estabelecer a condição para que a reta $y = ax + b$ seja tangente à parábola $y^2 = 2px$.

$$\text{Resp.: } p = 2ab$$

04. Achar a condição para que a reta $y = mx + n$ tangencie a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\text{Resp.: } a^2m^2 = n^2 - b^2$$

05. Pedir-se a equação da parábola $y^2 = 2px$ e que seja tangente à reta $y = -x - 1$.

$$\text{Resp.: } y^2 = 4x$$

SUGESTÃO:

a) Substituindo $y = -x - 1$ em $y^2 = 2px \Rightarrow (-x - 1)^2 = 2px$;

b) Desenvolvendo a equação acima e impondo $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ obtém-se $p = 2$.

06. Determinar os valores do coeficiente angular m para que a reta $y = mx$ tangencie a curva $4x^2 - 4xy + y^2 + 6x + 2 = 0$.

$$\text{Resp.: } m = \frac{-4 \pm \sqrt{14}}{2}$$

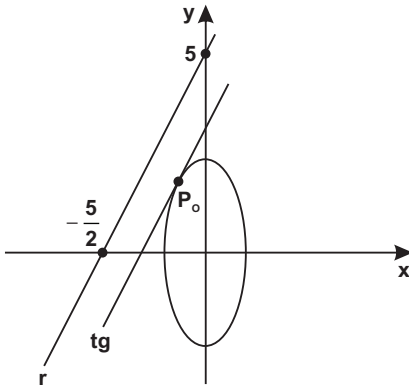
07. Calcular as equações das tangentes à circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$, paralelas à reta $3x - 4y = 0$.

Resp.: $3x - 4y - 35 = 0$ e $3x - 4y + 15 = 0$

08. Dada a elipse $5x^2 + y^2 = 5$, determinar o ponto mais próximo da elipse em relação à reta $y = 2x + 5$.

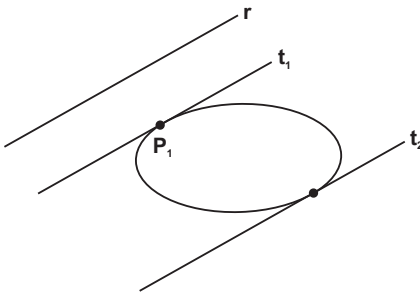
Resp.: $P_0 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$

SUGESTÃO:



- a) Calcule a tangente (tg);
- b) O ponto procurado P_0 é obtido pela interseção da reta tangente com a elipse dada.

09. Dada a reta $r: 2x - 3y + 5 = 0$ e a elipse $8x^2 + 18y^2 = 144$, conforme figura, pede-se:



- a) as equações das tangentes (t_1 e t_2) à elipse e paralelas à reta r ;
- b) o ponto de tangência P_1 .

Resp.:

a) $t_1: 2x - 3y + 12 = 0$

$t_2: 2x - 3y - 12 = 0$

b) $P_1 = (-3, 2)$

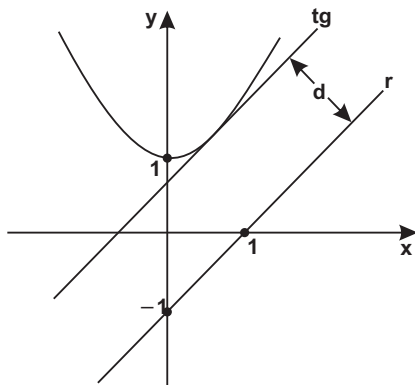
10. Calcular as coordenadas do ponto da parábola $y^2 = 8x$ mais próximo da reta $x - y + 10 = 0$.

Resp.: $P = (2, 4)$

11. Calcular a menor distância da reta $r: x - y - 1 = 0$ à parábola $y = x^2 + 1$.

Resp.: $\frac{7\sqrt{2}}{8}$

SUGESTÃO:



a) Calcule a tg paralela a r:

$$x - y + \frac{3}{4} = 0$$

b) Adote um ponto $P_o = (x_o, y_o)$ qualquer de r. A resposta será a distância do ponto P_o à reta tangente.

Fórmula:

$$d(P_o, tg) = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

12. Determinar os pontos da elipse $x^2 + \sqrt{2}xy + y^2 - 2 = 0$ tais que as tangentes sejam paralelas ao eixo x.

Resp.: $(-\sqrt{2}, 2)$ e $(\sqrt{2}, -2)$

SUGESTÃO:

As retas paralelas ao eixo y têm equação $y = k$. Esta deve ser substituída na equação da elipse e impõe-se $\Delta = 0$.

13. Calcular as equações das tangentes à elipse $13x^2 + 3y^2 - 26x + 24y + 22 = 0$ e que sejam paralelas à reta $2x - y + 3 = 0$.

Resp.: $2x - y - 1 = 0$ e $2x - y - 11 = 0$

14. Calcular os pontos da cônica $x^2 - 2xy + y^2 + 1 = 0$ em que as tangentes são paralelas à reta $2x + y - 3 = 0$.

Resp.: $P_1 = (0, -1)$ e $P_2 = (1, 2)$

Série B

**"Quando um homem não pode ser grande,
começa a diminuir os outros."**

Marquês de Maricá (1773-1848), político e moralista fluminense.

15. Determinar a equação da elipse com centro na origem e eixo focal sobre o eixo x , tal que o eixo maior seja 4 e tangencie a reta $y = x - 1$.

$$\text{Resp.: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

SUGESTÃO:

a) Equação da elipse: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

b) Levando-se $y = x - 1$ na equação da elipse chega-se a uma equação do 2.º grau em x , na qual impõe-se $\Delta = 0$. Resulta $b^2 = 3$.

16. Pede-se a equação canônica da hipérbole que passa pelo ponto $A = (3, 1)$ e que seja tangente à reta $x - 2y - 1 = 0$ (o eixo focal coincide com o eixo x e o centro com a origem do Sistema Cartesiano).

$$\text{Resp.: } \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

SUGESTÃO:

a) equação da hipérbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

b) $A = (3, 1) \in$ hipérbole: $\frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{9b^2}{b^2 + 1}$

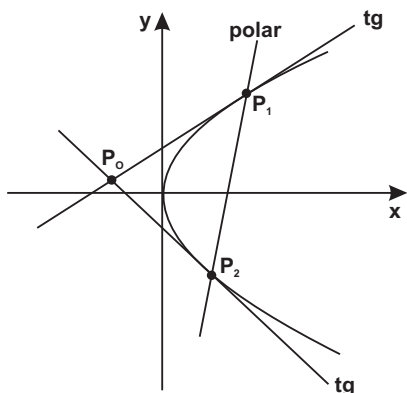
c) na equação da hipérbole substitui-se $x = 2y + 1$ e $a^2 = \frac{9b^2}{b^2 + 1}$.

Efetuando-se recai-se numa equação do 2.º grau onde o discriminante (Δ) deve ser nulo.

17. Uma elipse passa pelo ponto $P = (2\sqrt{2}, 1)$ e é tangente à reta $\sqrt{2}x + y - 3\sqrt{3} = 0$. Achar a equação da elipse sabendo que seus eixos coincidem com os eixos coordenados e eixo focal $\equiv x$.

$$\text{Resp.: } \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$$

2.º PROBLEMA: EQUAÇÃO DA TANGENTE POR UM PONTO EXTERNO À PARÁBOLA.



Dados:

$$\begin{cases} P_0 = (x_0, y_0) \\ y^2 = 2px \text{ (parábola)} \end{cases}$$

A equação da tangente tem a forma:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \quad \text{ou} \\ y &= y_0 + m(x - x_0) \quad \text{①} \end{aligned}$$

Levando-se ① na equação da parábola recai-se numa equação do 2.º grau. Nesta, impondo-se que o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ seja nulo, obtém-se o(s) coeficiente(s) angular(es) **m**.

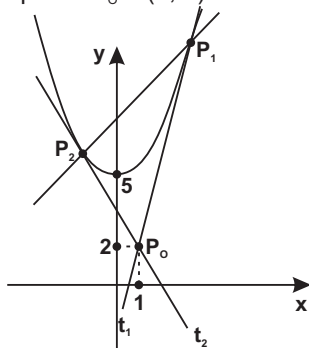
Os pontos P_1 e P_2 são os pontos de contato das tangentes com a parábola. A reta P_1P_2 é cognominada **reta polar de P_0** em relação à parábola.

Exercícios Resolvidos

*"Se deres as costas à luz, nada mais verás
senão a tua própria sombra."*

Zákind Piategórsky

01. Obter as equações das tangentes à parábola $x^2 - y + 5 = 0$ pelo ponto $P_0 = (1, 2)$.



a) Equação da tangente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = m(x - 1)$$

ou

$$y = m(x - 1) + 2 \quad \text{①}$$

b) Substituindo-se ① na equação da parábola:

$$x^2 - [m(x - 1) + 2] + 5 = 0$$

desenvolvendo e ordenando:

$$x^2 - mx + m + 3 = 0$$

c) Impondo $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

$$(-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m + 3) = 0$$

$$m^2 - 4m - 12 = 0 \Rightarrow m = 6 \text{ ou } m = -2$$

d) Resposta:

Levando $m = 6$ em ①:

$$y = 6x - 4 \quad (t_1)$$

Substituindo-se $m = -2$ em ①:

$$y = -2x + 4 \quad (t_2)$$

02. No exercício precedente, pede-se para calcular a equação da reta P_1P_2 (reta polar de P_0 em relação à parábola).

a) Cálculo de P_1 e P_2 :

Substituindo-se a equação de t_1 na equação da parábola:

$$6x - 4 = x^2 + 5$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \Rightarrow P_1 = (3, 14)$$

Levando a equação de t_2 na equação da parábola:

$$-2x + 4 = x^2 + 5$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = -1 \Rightarrow P_2 = (-1, 6)$$

b) Equação da polar:

$$\text{Reta } P_1P_2 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 14 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2x - y + 8 = 0 \quad (\text{Resp.})$$

Exercícios

"Os que nada fazem supõem-se capazes de tudo fazer»

Spencer Tracy (1900-1967), ator norte-americano.

01. Calcular as equações das retas que passam pelo ponto

$A = (7, 2)$ e sejam tangentes à elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

$$\text{Resp.: } y = 2 \text{ e } 7x - 10y - 29 = 0$$

02. Dada a equação da elipse $4x^2 + 9y^2 = 72$ e um ponto exterior $P = (0, 4)$, calcular as equações das tangentes desde o ponto P à elipse.

$$\text{Resp.: } y = \pm \frac{2}{3}x + 4$$

03. Dada a hipérbole $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1$ e o ponto $P = (0, 6)$, obter:

- a) as equações das tangentes à hipérbole que passam pelo ponto $(0, 6)$;
- b) os pontos de contato das tangentes com a hipérbole;
- c) equação da reta polar.

Resp.: a) $y = \pm 3\sqrt{2}x + 6$

b) $(\pm 2\sqrt{2}, -6)$

c) $y + 6 = 0$

04. Calcular as equações das retas que passam pelo ponto $P_o = (1, 0)$ e são tangentes à parábola de equação $x = y^2 - 6y + 10$.

Resp.: $y = \left(\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} \right) x + 2$

Série B

"Pior que o governo dos maus é o silêncio dos bons."

Martin Luther King (1929-1968), religioso norte-americano.

05. Pelo ponto $P_o = (1, 4)$ são traçadas as tangentes à elipse

$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$. Determinar os pontos de contato das tangentes com a elipse.

Resp.: $P_1 = (4, 1)$ e $P_2 = \left(\frac{46}{13}, \frac{19}{13} \right)$

06. Pelo ponto $P = (8, 3)$ obter as equações das tangentes à circunferência $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

Resp.: $y - 3 = 0$ e $15x - 8y - 96 = 0$

SUGESTÃO:

a) Equações das tangentes:

$y = 3 + m(x - 8)$

b) Substituem-se as equações das tangentes na equação da

circunferência e faz-se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, obtendo-se $m = 0$ e $m = \frac{15}{8}$.

3.º PROBLEMA: EQUAÇÃO DA TANGENTE EM UM PONTO $P_0 = (x_0, y_0)$ PERTENCENTE À PARÁBOLA.

Vamos determinar a equação da tangente à parábola $y^2 = 2px$ em um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ pertencente à parábola. A equação da tangente procurada é do tipo $y - y_0 = m(x - x_0)$.

DEDUÇÃO

Sejam:

$$\begin{cases} y^2 = 2px & \textcircled{1} \\ y = y_0 + m(x - x_0) & \textcircled{2} \end{cases}$$

Levando $\textcircled{2}$ em $\textcircled{1}$:

$$[y_0 + m(x - x_0)]^2 = 2px$$

Efetuando o produto notável e ordenando a equação do 2.º grau em x :

$$m^2x^2 + (2my_0 - 2m^2x_0 - 2p)x + y_0^2 - 2mx_0y_0 + m^2x_0^2 = 0$$

Pela condição de tangência o discriminante deve anular-se:

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = 0 \\ (2my_0 - 2m^2x_0 - 2p)^2 - 4m^2(y_0^2 - 2mx_0y_0 + m^2x_0^2) &= 0 \\ \text{Desenvolvendo e simplificando:} \\ 2m^2x_0 - 2my_0 + p &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula de Bháskara à equação acima (do 2.º grau em m):

$$m = \frac{y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 2px_0}}{2x_0} \quad \textcircled{3}$$

Mas como $P_0 = (x_0, y_0)$ pertence à parábola:

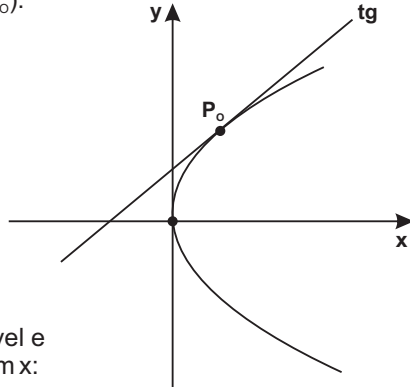
$$y_0^2 = 2px_0 \quad \textcircled{4}$$

Substituindo $\textcircled{4}$ em $\textcircled{3}$:

$$m = \frac{y_0}{2x_0} \quad \textcircled{5}$$

Por seu turno $\textcircled{4}$ permite:

$$\frac{y_0}{2x_0} = \frac{p}{y_0} \Rightarrow \frac{p}{y_0} = m \quad \textcircled{6}$$



Levando ⑥ em ② :

$$y = y_0 + \frac{p}{y_0}(x - x_0)$$

ou

$$yy_0 = y_0^2 + px - px_0$$

Todavia ④ fornece : $y_0^2 = 2px_0$

$$yy_0 = 2px_0 + px - px_0$$

$$y_0y = px + px_0$$

Fatorando o p:

$$y_0y = p(x + x_0)$$

Isto posto:

A tangente à parábola $y^2 = 2px$ em seu ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ tem equação $y_0y = p(x + x_0)$.

Adotando raciocínio análogo, obtém-se as equações das tangentes à elipse, à hipérbole e à circunferência.

Equação da tangente à elipse

A equação da tangente à elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ em seu ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ é:

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

Equação da tangente à hipérbole

A equação da tangente à hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ em seu ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ é:

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

Equação da tangente à circunferência

A equação da tangente à circunferência $x^2 + y^2 = k^2$ em seu ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ é:

$$x_0x + y_0y = k^2$$

Regra prática

Face o exposto, temos uma importante regra prática para o cálculo da tangente no ponto de contato $P_o = (x_o, y_o)$ a uma parábola, elipse, hipérbole ou circunferência:

A VARIÁVEL	SUBSTITUI-SE POR:
x^2	$x_o x$
y^2	$y_o y$
x	$\frac{x + x_o}{2}$
y	$\frac{y + y_o}{2}$
xy	$\frac{y_o x + x_o y}{2}$

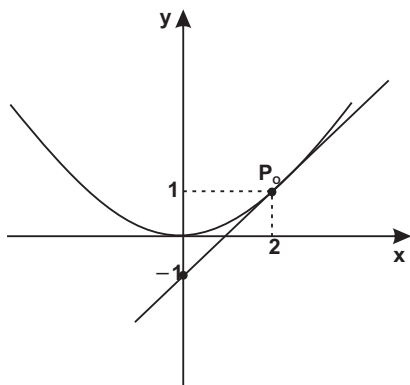
Exemplo Resolvido

"Numa democracia, o direito de ser ouvido não inclui automaticamente o direito de ser levado à sério."

Hubert H. Humphrey (1911-1977), vice-presidente dos EUA.

Determinar a equação da tangente à parábola $x^2 = 4y$ em seu ponto $P_o = (2, 1)$.

RESOLUÇÃO:



a) Equação da tangente:
 $x_o x = p(y + y_o)$

onde:

$$x_o = 2$$

$$y_o = 1$$

$$p = 2 \text{ (pois } 2p = 4 \text{)}$$

b) Levando tais valores na equação da tangente:

$$2x = 2(y + 1) \text{ ou}$$

$$x - y - 1 = 0 \quad (\text{Resp.})$$

Obs.:

A exemplo o que aconteceu com o 1.º e 2.º problemas de tangência, poder-se-ia utilizar na resolução a equação do feixe de retas: $y - 1 = m(x - 2)$. Nesta, isolando-se y e substituindo na equação da parábola, recai-se numa equação do 2.º grau, na qual se impõe $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, resultando $m = 1$. Igualmente a equação da tangente é $x - y - 1 = 0$. Tal método, via de regra não é aconselhável, por ser excessivamente laborioso.

Exercícios

"Cometi o maior dos pecados que um homem pode cometer: não fui feliz".

Jorge Luiz Borges (1899-1986), escritor argentino.

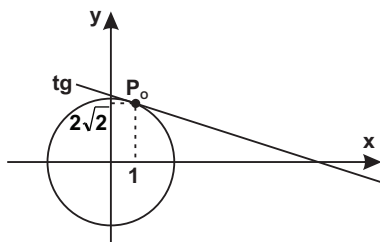
01. Equação da tangente à parábola $y^2 - 2x = 0$ em seu ponto $A = (2, 2)$.

Resp.: $x - 2y + 2 = 0$

02. Calcular a equação da tangente à hipérbole $9x^2 - 4y^2 = 36$ em seu ponto $P = \left(3, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$.

Resp.: $27x - 6\sqrt{5}y - 36 = 0$

03. Abaixo tem-se uma circunferência de raio igual a 3. Pede-se a equação da tangente em seu ponto $P_0 = (1, 2\sqrt{2})$.



Resp.: $x + 2\sqrt{2}y - 9 = 0$

SUGESTÃO:

Equação da circunferência:
 $x^2 + y^2 = 9$

04. Obter a equação da tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$ no ponto $P_0 = (6, 1)$ pertencente à circunferência.

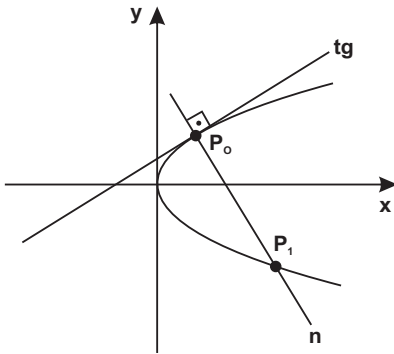
Resp.: $3x + 2y - 20 = 0$

- 05.** Dada a circunferência $x^2 + y^2 - 4y - 96 = 0$, pede-se:
 a) a equação da reta tangente à circunferência pelo ponto $A = (10, 2)$;
 b) as equações das retas tangentes à circunferência pelo ponto $B = (0, 20)$.

Resp.: a) $x - 10 = 0$

$$b) y = \pm \frac{2\sqrt{14}}{5}x + 20$$

- 06.** Abaixo tem-se uma parábola de equação $y^2 = 8x$. Pelo ponto $P_0 = (2, 4)$ pede-se:



- a) a equação da tangente;
 b) a equação da normal (n);
 c) a distância do P_0 ao ponto P_1 .

Resp.:

a) $x - y + 2 = 0$

b) $x + y - 6 = 0$

c) $16\sqrt{2}$

- 07.** Pede-se o coeficiente angular da normal à elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ em seu ponto $P = \left(2, \frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$.

Resp.: $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

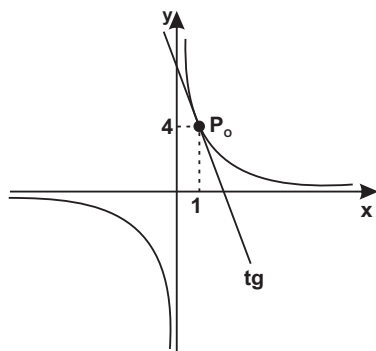
- 08.** Calcular a equação da tangente à hipérbole $5x^2 - 2y^2 + 8x + 7y + 7 = 0$ no ponto $P_0 = (-1, 4)$.

Resp.: $2x + 9y - 34 = 0$

- 09.** Determinar a equação da tangente à hipérbole $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 6y - 11 = 0$ em seu ponto $(2, 1)$

Resp.: $x + y - 3 = 0$

10. A figura abaixo representa uma hipérbole de equação $xy = 4$.
 Pede-se a equação da tangente em seu ponto $P_o = (1, 4)$.



Resp.: $4x + y - 8 = 0$

11. Pede-se a equação da reta normal à elipse
 $4x^2 + y^2 - 8x + 2y - 12 = 0$ em seu ponto $P_o = (3, -2)$.

Resp.: $x + 8y + 13 = 0$

Série B

***"A vida só pode ser compreendida olhando-se para trás;
 mas só pode ser vivida olhando-se para frente."***

Soren A. Kierkegaard (1813-1855), filósofo dinamarquês

12. Calcular as equações das retas tangentes à elipse
 $x^2 - 2xy + 3y^2 - 3x + 5y - 10 = 0$ nos pontos em que a elipse intercepta o eixo das abscissas.

Resp.: $7x - 5y - 35 = 0$
 $7x - 9y + 14 = 0$

SUGESTÃO:

Para se obter os pontos de interseção da elipse com o eixo x basta fazer $y = 0$ na equação dada. Os pontos são $A = (5, 0)$ e $B = (-2, 0)$.

13. A cônica $x^2 - xy - 9y^2 + mx + ny + 7 = 0$ passa pelos pontos
 $A = (1, 1)$ e $B = (2, 1)$. Calcular a equação da tangente no ponto $A = (1, 1)$.

Resp.: $x + 15y - 16 = 0$

SUGESTÃO:

Inicialmente leva-se as coordenadas de A e B na equação da cônica e ipso facto obtém-se $m = -2$ e $n = 4$.

O GUIZO DO PESCOÇO DO GATO

No sótão da velha casa, os ratos estavam em Assembleia discutindo um problema que lhes angustiava: todos os dias, um esperto gato, sorrateira e silenciosamente, abocanhava um ou dois ratos.

Todos davam sugestões. Um deles pede a palavra:

– Por que não pôr um guizo (chocalho) no pescoço do gato? À distância, ouviremos o seu barulho e haverá tempo para nos escafedermos!

– Muito bem, ovacionaram eufóricos os ratos.

Feito o silêncio, a experiente ratazana murmura em seu canto:

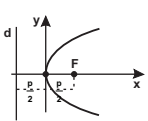
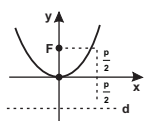
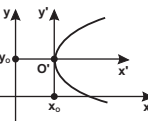
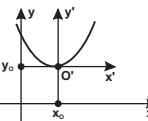
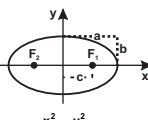
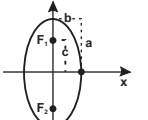
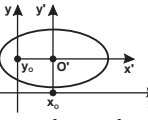
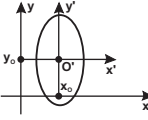
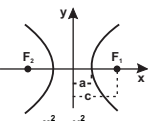
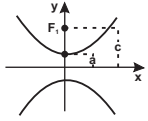
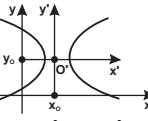
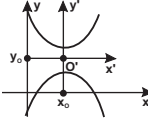
– Mas quem porá o guizo no pescoço do gato?

Moral da história: Entre as palavras e a ação há uma longa distância.

Adaptado pelo autor de uma fábula do escritor francês Jean de La Fontaine (1621-1695).



QUADRO - RESUMO

	1.ª EQUAÇÃO (CANÔNICA)		2.ª EQUAÇÃO		RELAÇÕES NOTÁVEIS	EQUAÇÃO DA TANGENTE EM SEU PONTO $P_0 = (x_0, y_0) \Rightarrow$ para as equações canônicas e eixo focal = x
	EIXO FOCAL COINCIDE COM O EIXO X	EIXO FOCAL COINCIDE COM O EIXO Y	EIXO FOCAL É PARALELO AO EIXO X	EIXO FOCAL É PARALELO AO EIXO Y		
PARÁBOLA	 $y^2 = 2px$	 $x^2 = 2py$	 $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$	 $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$	$VF = \frac{p}{2}$	$y_0 y = p(x + x_0)$
ELIPSE	 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	 $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$	 $\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$	$a^2 = b^2 + c^2$	$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$
HIPÉRBOLA	 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	 $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$	 $\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$	$c^2 = a^2 + b^2$	$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

Para uma compreensão um pouco mais abrangente do desenvolvimento alcançado pela Geometria Plana e Espacial solicita-se uma nova leitura do epítome histórico que se inicia na pág. 11 do presente manual. Depreende-se que foi extraordinário o incremento dado à Geometria pelos matemáticos helenísticos: Euclides, Arquimedes e Apolônio de Perga. Porém, não dispunham de uma notação algébrica adequada.

Fulcrado nos geômetras gregos e no desenvolvimento da Álgebra em toda a Europa, Pierre de Fermat conclui em 1629 o manuscrito *Ad locos planos et solidos isagoge* (Introdução aos lugares planos e sólidos). Embora hajam controvérsias, tal manuscrito representa o marco zero da Geometria Analítica. É cristalina em Fermat a percepção de uma Geometria Analítica de três dimensões: “Se o problema proposto envolve três incógnitas, deve-se achar, para satisfazer a equação, não apenas um ponto ou uma curva, mas toda uma superfície”.

A partir de Fermat, a Geometria Analítica trouxe inúmeras facilidades ao desenvolvimento da Geometria Plana e Espacial e foi considerada a “estrada real”, numa alusão a Euclides que afirmara ao rei Ptolomeu que “não havia nenhuma estrada real para se aprender Geometria”.

Muitas das obras de **Euclides** (séc. III a.C.) se perderam. Mas há consistentes referências que o grande geômetra tenha escrito um tratado sobre elipsoides, paraboloides, hiperboloides, além de esfera, cilindro e cone.

Euclides fundou a Escola de Matemática na renomada Biblioteca de Alexandria, que pode ter alcançado a cifra de 700.000 rolos (papiros e pergaminhos).

A Biblioteca de Alexandria está muito próxima do que se entende hoje por Universidade. E se faz oportuna a asserção do conspícuo historiador matemático Carl B. Boyer: “A ‘Universidade’ de Alexandria evidentemente não diferia muito de instituições modernas de cultura superior. Parte dos professores provavelmente se notabilizou na pesquisa, outros eram melhores como administradores e outros ainda eram conhecidos pela capacidade de ensinar. Pelos relatos que possuímos, parece que Euclides definitivamente pertencia à última categoria. Nenhuma descoberta nova é atribuída a ele, mas era conhecido pela sua habilidade ao expor. Essa é a chave do sucesso de sua maior obra - *Os Elementos*.”

Alexandria, a partir de Euclides, até o séc. IV d.C., reinou quase absoluta não só como a mais eclética e cosmopolita cidade da antiguidade, mas também como principal centro da produção matemática.

Em 640 d.C., o califa Omar mandou que fosse queimados todos os livros da Biblioteca sob o argumento de que “ou os livros contêm o que está no Alcorão e são desnecessários ou contêm o oposto e não devemos lê-los”.

Por sua vez Arquimedes (287(?) - 212 a.C.) legou-nos uma original e vastíssima produção em Geometria Plana e Sólida.

Arquimedes nasceu e foi morto em Siracusa, na ilha grega de Sicília. Quando jovem, estudou em Alexandria, com os discípulos de Euclides. A genialidade de Arquimedes como físico-matemático só é comparável com Isaac Newton, no séc. XVIII.

Há dois tratados de Arquimedes que apresentam uma extraordinária profundidade em relação aos sólidos de revolução.

Sobre conóides e esferoides: descreve sólidos de revolução gerados por elipses, parábolas e hipérbolas em torno dos seus eixos (quádras de revolução). Ademais, neste tratado Arquimedes obtém a área de uma elipse ($S = \pi ab$).

Sobre esfera e cilindro: contém demonstrações rigorosas do cálculo do volume e da área dos referidos sólidos. Vai além: estuda as áreas e volumes das superfícies obtidas por seções planas sobre a esfera (calotas e segmentos) e sobre o cilindro. A pedido de Arquimedes, foi gravada na lápide de seu túmulo a representação de uma esfera inscrita num cilindro circular reto.

Do que hodiernamente denomina-se quádras, há contribuições significativas de dois outros matemáticos helenos: Apolônio e Pípis.

Apolônio de Perga (262(?) - 190(?) a.C.), que supõe-se tenha estudado e por algum tempo ensinado na “Universidade” de Alexandria, mostrou pela primeira vez que a elipse, a parábola e a hipérbole podem ser obtidas variando a inclinação do plano de seção sobre um cone de duas folhas. Para gáudio de todos, sua monumental obra *As Cônicas* sobreviveu praticamente incólume: dos oito livros apenas um se perdeu.

Pappus (séc. IV d.C.) viveu quando a matemática grega dava seus últimos suspiros. Escreveu *Coleção Matemática*, que infelizmente foi um “requiem da matemática grega, porque depois de Pípis, a matemática estiolou e quase desapareceu, e teve de esperar por 1.300 anos para um renascimento no começo do século XVII” (George F. Simmons).

A *Coleção Matemática* é uma espécie de enciclopédia onde se faz um epitome com os devidos créditos das descobertas dos matemáticos gregos. Por ser bastante criterioso e escrupuloso na citação das fontes, credita-se a Pappus belos teoremas da Geometria sobre Centros de Gravidade de Sólidos e Superfícies de Revolução.

Entretanto, deve-se a Leonhard Euler (1707-1783) uma das mais

significativas contribuições à geometria no E^3 . Em seu livro *Introductio in Analysis Infinitorum* (Introdução à Análise Infinita, publicada em 1748) apresenta a primeira exposição em livro-texto de quádricas, considerando estas como superfícies do 2.º grau no E^3 . No mencionado livro, Euler apresenta as equações dos cones, dos paraboloides, dos elipsoides e dos hiperboloides, utilizando o sistema cartesiano no E^3 .

Euler, um prolificentíssimo matemático, suíço de nascimento, escrevia em média 800 páginas por ano e a coletânea completa de suas obras é composta de cerca de 75 volumes. Em plena atividade intelectual, morreu aos 76 anos, sendo que os últimos 17 anos passou em total cegueira (consequência de uma catarata). Mesmo cego, continuou ditando suas descobertas matemáticas aos seus 13 filhos.

Euler se ocupou com praticamente todos os ramos então conhecidos da Matemática, a ponto de merecer do francês François Arago o seguinte encômio: "Euler calculava sem qualquer esforço aparente como os homens respiram e as águias se sustentam no ar".

A partir do séc. XVIII, superfícies têm um notável incremento com surgimento da Geometria Diferencial, com interaplicações do Cálculo Diferencial e Integral e da Geometria Analítica.

1. DEFINIÇÃO

Uma quádrlica ou superfície quádrlica é o conjunto dos pontos do espaço tridimensional, cujas coordenadas cartesianas verificam uma equação do 2.º grau a, no máximo três variáveis:

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$, denominada de equação cartesiana da superfície quádrlica.

Se o termo independente **J** da equação acima for nulo, a quádrlica passa pela origem, pois o ponto $O = (0, 0, 0)$ satisfaz tal equação.

2. EXEMPLOS DE QUÁDRICAS

Esferas, paraboloides, elipsoides, hiperboloides, cilindros (do 2.º grau), **cones** (do 2.º grau) constituem as mais conhecidas superfícies quádrlicas.

Acrescem-se: pares de planos, pontos ou conjuntos vazios, que podem ser representados por uma equação do 2.º grau com três variáveis no E^3 e constituem as **quádrlicas degeneradas**.

Exemplos

Se tentou e fracassou, se planejou e viu seus planos ruírem, lembre-se que os maiores homens da História, foram produtos da coragem, e a coragem bem sabemos nasce no berço da adversidade.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 10z + 13 = 0$ (esfera)

b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 2$ (elipsoide)

c) $xy + yz + xz - 2x + 2 = 0$ (hiperboloides)

d) $x^2 + y^2 - z = 4$ (paraboloides)

e) $x^2 + 2y^2 - y + z - 3xy + xz - yz = 0$ (superfície cilíndrica)

f) $x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - 2xz - 2yz = 0$ (superf. cônica)

g) $x^3 - z^3 + 3xz^2 - 3x^2z - z - y = 0$ (não é uma quádrlica. Esta equação do 3.º grau representa uma superfície cilíndrica)

- h) $xy^2 + xz^2 + 2yz^2 - 2z^2 - 2xy + x = 0$ (não é uma quádrlica. Esta equação do 3.º grau representa uma superfície cônica)
- i) $x^2 - 25 = 0$ (2 planos paralelos - quádrlica degenerada)
- j) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - y + 2z + 10 = 0$ (um ponto - quádrlica degenerada)
- l) $x^2 + y^2 + z^2 + 3 = 0$ (um conjunto vazio - quádrlica degenerada)

3. REVISANDO

É assaz importante rememorar dos capítulos pretéritos que a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, isto é, uma equação do 2.º grau, a no máximo duas variáveis, representa uma cônica no plano xy (E^2).

EXEMPLOS DE CÔNICAS

Circunferências, elipses, parábolas, hipérbolas constituem as mais conhecidas cônicas. Faz-se mister recordar que uma equação do 2.º grau com duas variáveis no E^2 pode representar uma cônica degenerada: ponto, reta, par de retas ou um conjunto vazio.

Sabemos que a equação $x^2 + 2y^2 = 3$ representa uma elipse no E^2 . Antecipemos porém, que esta mesma equação é a de uma quádrlica (superf. cilíndrica de geratrizes paralelas ao eixo z) no E^3 .

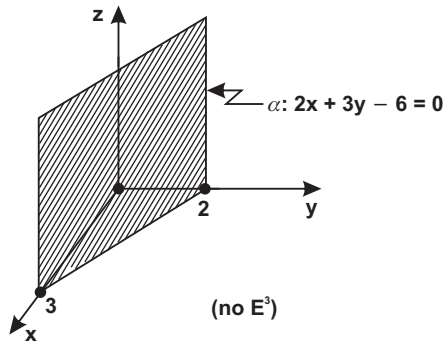
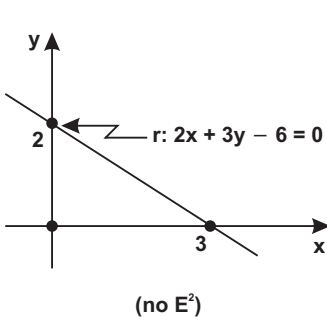
Como analogia, vale lembrar o exposto no capítulo de plano:

A equação $ax + by + c = 0$ constitui:

- uma reta no E^2 ;
- um plano paralelo ao eixo z , no E^3 .

Exemplo:

No E^2 a equação $2x + 3y - 6 = 0$ representa uma reta. Entretanto, no E^3 tal equação representa um plano paralelo ao eixo z .



4. SUPERFÍCIES

A equação cartesiana $f(x, y, z) = 0$ representa genericamente uma superfície. No E^3 as equações do 2.º grau constituem-se em superfícies quádricas e as do 1.º, 3.º, 4.º... graus em superfícies não quádricas.

Exemplos

“Dê um deserto a um burocrata e em cinco anos ele estará importando areia.”

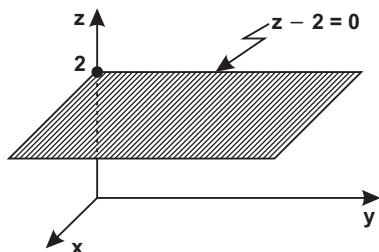
Henri Jeanson (1900-1970) – escritor francês.

- a) $3x + 4y - 5z + 2 = 0$ (superf. do 1.º grau \Rightarrow plano)
- b) $x^2 + 2xy + 3yz + x - 2 = 0$ (superf. do 2.º grau \Rightarrow quádrica)
- c) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 8 = 0$ (superf. do 3.º grau \Rightarrow não quádrica)

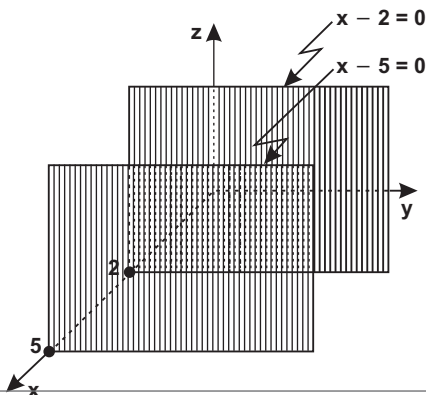
A superfície do 1.º grau $ax + by + cz + d = 0$ já mereceu a ênfase necessária em capítulo específico: o plano (ver *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica*, do autor).

Face às solicitações vindouras, recordemos casos particulares do plano:

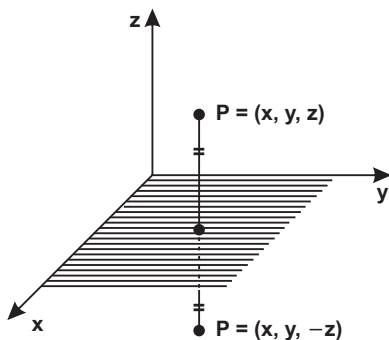
- a) $z - 2 = 0$ (Plano paralelo ao plano xy)



- b) $x^2 - 7x + 10 = 0$ ou $(x - 2)(x - 5) = 0$ (superf. quádrica, que decomposta representa 2 planos paralelos ao plano yz)



5. SIMETRIA



a) Simetria em relação aos planos coordenados

Uma superfície é simétrica em relação ao plano xy se para qualquer ponto $P = (x, y, z)$ dessa superfície existir um ponto $P' = (x, y, -z)$ pertencente à superfície. Destarte, a equação não se altera pela substituição de z por $-z$.

Isto posto, a superfície cuja equação cartesiana não se altera quando trocamos o sinal de uma das

variáveis é simétrica em relação ao plano das outras duas variáveis.

Em particular: se a equação cartesiana de uma superfície só contém expoentes pares para a variável z , então essa superfície é simétrica em relação ao plano xy .

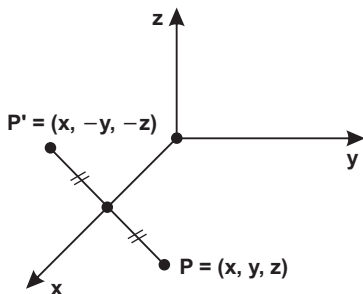
Exemplos

“Tudo de bom acontece a pessoas com disposição alegre.”

Voltaire (1694-1778), escritor francês.

- 1) $z^2 + x - y + 3 = 0 \Rightarrow$ superfície quádrlica simétrica em relação ao plano xy .
- 2) $x^2 + 2y - 3z + 4 = 0 \Rightarrow$ superfície quádrlica simétrica em relação ao plano yz .
- 3) $3x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xz + 3 = 0 \Rightarrow$ superfície quádrlica simétrica ao plano xz .
- 4) $y^4 - 3x^3z + z + 2 = 0 \Rightarrow$ superfície simétrica ao plano xz .

b) Simetria em relação aos eixos coordenados.



Uma superfície é simétrica ao eixo x , se para qualquer ponto $P = (x, y, z)$ dessa superfície, existir outro ponto $P' = (x, -y, -z)$, pertencente à superfície.

Assim, a superfície cuja equação cartesiana não se altera quando trocamos o sinal de duas variáveis é simétrica em relação ao eixo da terceira variável.

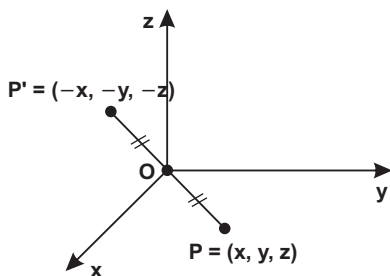
Em particular: se a equação algébrica de uma superfície contém expoentes pares para as variáveis x e y e ímpar para a variável z , a superfície é simétrica em relação ao eixo z .

Exemplos

Grandes obras não nascem apenas de grandes idéias.

- 1) $3x^2 + y^2 - 4z + 1 = 0 \Rightarrow$ superfície simétrica ao eixo z .
- 2) $y^2 + 2z^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow$ superfície simétrica ao eixo x .
- 3) $x^2 + 2y^2 - 3z^3 - 2xy + 1 = 0 \Rightarrow$ superfície simétrica ao eixo z .
- 4) $3x^4 + z^2 - y^3 + y + 2 = 0 \Rightarrow$ superfície simétrica ao eixo y .

c) Simetria em relação à origem



Uma superfície é simétrica em relação à origem O , se para qualquer ponto $P = (x, y, z)$ dessa superfície existir outro ponto $P' = (-x, -y, -z)$, pertencente à superfície.

Destarte, superfície cuja equação cartesiana não se altera quando se permuta o sinal das três variáveis é simétrica em relação à origem do sistema de coordenadas.

Em particular: adotando conhecimentos há pouco exarados, quando todos os expoentes das variáveis de uma equação forem de grau par, a superfície é simétrica em relação à origem e também em relação aos eixos planos coordenados.

Exemplos

“Trate um homem como ele é, e ele continuará sendo como é. Trate-o como ele pode e deve ser, e ele tornar-se-à o que pode e deve ser.”

Johann Wolfgang Goethe (1749-1832), poeta alemão.

- 1) $x^2 + y^2 + 2z^2 - 25 = 0 \Rightarrow$ superfície simétrica em relação à origem e também aos eixos e planos coordenados.
- 2) $xy + xz - yz + 3 = 0 \Rightarrow$ superfície simétrica em relação à origem.
- 3) $xyz + 2x + 3y + 4z = 0 \Rightarrow$ superfície simétrica em relação à origem.
- 4) $x^3 + y^3 - 4z = 0 \Rightarrow$ superfície simétrica em relação à origem.
- 5) $x^3 + y^3 - 4z + 2 = 0 \Rightarrow$ superfície **não** simétrica em relação à origem.

6. EQUAÇÕES DE CURVAS NO E^3

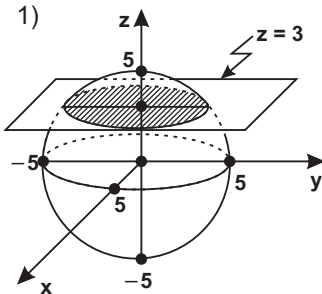
É sabido que uma única equação representa uma curva no plano cartesiano bidimensional. Por exemplo: a equação $3x^2 - 2y^2 = 5$ é uma hipérbole no plano xy . Por sua vez, a equação $z^2 = 2y$ representa uma parábola no plano yz .

No entanto, no E^3 , adotando um conceito bastante intuitivo, uma curva pode ser concebida geometricamente como interseção de duas superfícies. O sistema constituído pelas equações de duas superfícies distintas e interceptantes em mais de um ponto, fornece a equação cartesiana da curva:

$$\text{curva} \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Exemplos

Há poucos bancos com sombra no caminho da vitória.



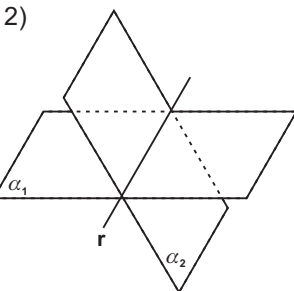
A figura ao lado mostra na área hachurada um círculo, fruto da interseção de uma esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ com o plano $z = 3$.

Equação da curva no E^3 :

$$\text{circunferência} \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ z = 3 \end{cases}$$

Obs.:

Para $z = 3$ tem-se a equação $x^2 + y^2 + (3)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$, que representa um círculo de raio igual a 4 no plano $z = 3$.



Uma reta (que é um caso particular de curva) pode ser determinada pela interseção de dois planos não paralelos:

$$r: \begin{cases} \alpha_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \alpha_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Exercícios

“Gasta-se menos tempo fazendo a coisa certa, do que explicando porque a fizemos errada.”

H. W. Longfellow

01. Pede-se a soma das assertivas verdadeiras:

- 01) A superfície quádrlica $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x - 4z + 2 = 0$ é simétrica ao plano cartesiano xz ;
- 02) A superfície $x^3 + y - 3z = 0$ é simétrica em relação à origem;
- 04) A superfície quádrlica $x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 0$ passa pela origem, é simétrica em relação aos planos xz e xy e em relação ao eixo x ;
- 08) A superfície quádrlica $2x^2 + 3y^2 - 2z^2 - 4 = 0$ não passa pela origem e é simétrica em relação aos eixos e planos coordenados e em relação à origem;
- 16) A equação $x^2 - y^2 = 2$ representa no E^3 uma hipérbole;
- 32) Toda superfície cilíndrica é uma quádrlica;
- 64) A superfície quádrlica $y^2 + z^2 = 2x$ é simétrica em relação aos planos xz e xy , em relação ao eixo x e passa pela origem.

Resp.: 79 (V, V, V, V, F, F, V)

02. Verificar se os pontos $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, 1, 3)$ pertencem à superfície quádrlica $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - z - 3 = 0$.

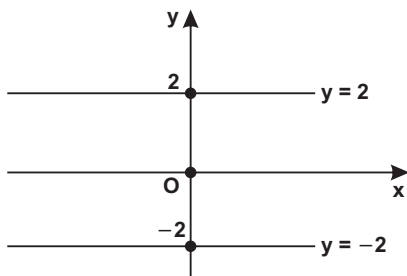
Resp.: $A \in S$; $B \notin S$.

03. Representar no E^2 e no E^3 a equação $y^2 - 4 = 0$.

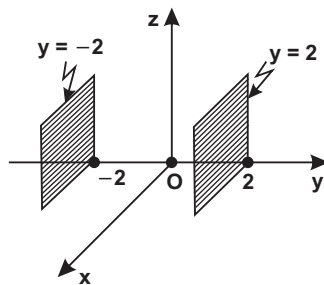
Resp.:

a) no E^2

b) no E^3



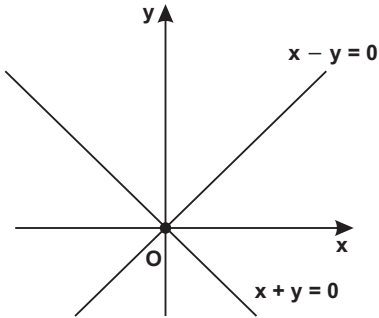
(duas retas paralelas)



(dois planos paralelos)

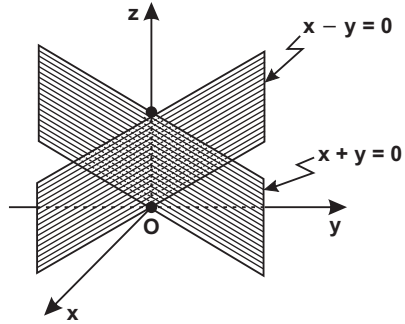
04. Representar no E^2 e no E^3 a equação $x^2 - y^2 = 0$.

Resp.:
a) no E^2



(duas retas bisetritrizes dos quadrantes)

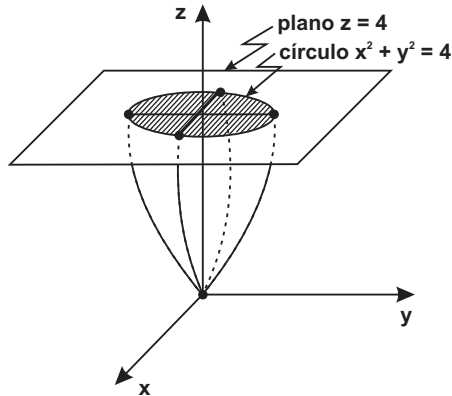
b) no E^3



(dois planos bissetores dos oitantes)

05. Identificar a curva $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases}$

Resp.: Para $z = 4$ tem-se $x^2 + y^2 = 4$, que representa um círculo de $R = 2$ no plano $z = 4$.



Obs.:

A equação $z = x^2 + y^2$ representa um parabolóides conforme ilustra a figura acima.

Série B

**“Quem quer fazer alguma coisa, encontra um meio.
Quem não quer fazer nada, encontra uma desculpa.”**

Provérbio árabe

06. Calcular as equações cartesianas da curva dada por suas equações paramétricas.

$$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = \frac{t}{3} + 2 \\ z = t^2 + 1 \end{cases}$$

Resp.: $\begin{cases} x^2 + 4x - z + 5 = 0 \\ x - 3y + 8 = 0 \end{cases}$

SUGESTÃO:

Da 1.^a equação tem-se $t = x + 2$, o qual é substituído nas outras duas equações.

07. Achar a equação do lugar geométrico dos pontos do E^3 cujas distâncias ao ponto $A = (2, 1, -3)$ equivale ao triplo da distância ao eixo y .

Resp.: $8x^2 - y^2 + 8z^2 + 4x + 2y - 6z - 14 = 0$

SUGESTÃO:

a) Seja $P = (x, y, z)$ o ponto procurado;

b) $d(P, A) = 3d(P, y)$

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2} = 3\sqrt{x^2 + z^2}$$

quadrando e desenvolvendo tem-se a resposta (veremos que esta superfície quádrica representa um hiperboloides de uma folha).

08. Uma partícula se move de tal forma que a sua distância ao eixo x é igual a sua distância ao plano $z = 3$. Encontrar a equação da trajetória desta partícula.

Resp.: $y^2 + 6z - 9 = 0$ (quádrica)

09. Calcular a equação do lugar geométrico gerado por um ponto que se desloca no E^3 de tal modo que a soma das distâncias aos pontos $A=(0, 1, 2)$ e $B=(1, 3, 0)$ é 5.

Resp.: $96x^2 + 84y^2 + 84z^2 - 60x - 320y - 280z + 32yz - 225 = 0$

SUGESTÃO:

a) Seja o ponto $P = (x, y, z)$ o ponto procurado;

b) $d(P, A) + d(P, B) = 5$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-0)^2} = 5$$

desenvolvendo tem-se a resposta (tal superfície quádrica é uma elipsóide).

7. INTERSEÇÕES DA SUPERFÍCIE COM OS EIXOS COORDENADOS

O ponto de interseção de uma superfície com o eixo z tem abscissa e ordenada nulas. Genericamente, na obtenção do ponto de interseção de uma superfície com um eixo coordenado, anulam-se as variáveis não homônimas do eixo considerado.

Exemplo

“A verdadeira glória repousa em convencer, não em vencer”

Vitor Hugo (1802-1885), escritor francês

Achar as coordenadas dos pontos de interseção da superfície quádrica $4x^2 + y^2 - z = 16$ com os eixos coordenados.

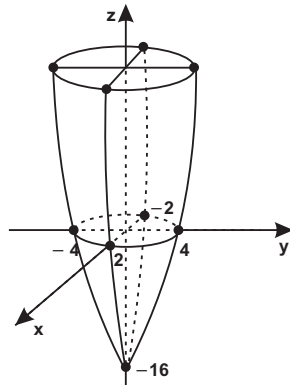
RESOLUÇÃO:

a) com o eixo $x \Rightarrow 4x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 2$

b) com o eixo $y \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$

c) com o eixo $z \Rightarrow -z = 16 \Rightarrow z = -16$

GRÁFICO: (Paraboloides) \Rightarrow

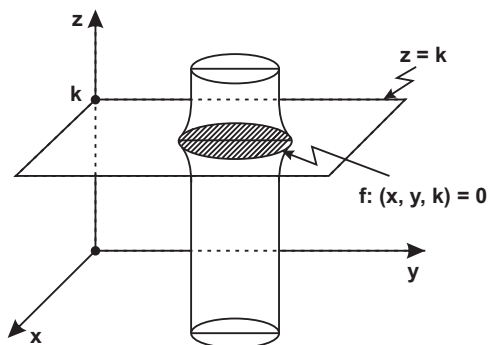


8. INTERSEÇÃO DA SUPERFÍCIE COM PLANOS (Traços da superfície)

Ao se representar graficamente uma superfície é assaz importante se conhecer as suas curvas de interseção com os planos coordenados ou então com planos paralelos aos planos coordenados. Tais curvas são denominadas de **traços** da superfície no plano. O traço de uma superfície quádrica é sempre uma cônica. A demonstração é trivial. Podemos ter uma idéia da forma da superfície $f(x, y, z) = 0$, efetuando-se sua interseção com o plano $z = k, k \in \mathbb{R}$.

Ao se substituir na equação $f(x, y, z) = 0$, a cota z por k , obtemos $f(x, y, k) = 0$, que representa uma curva no plano $z = k$.

É bastante simples se obter o traço de uma superfície com o plano coordenado xy : na equação dada faz-se $z = 0$, obtendo-se $f(x, y, 0) = 0$. Genericamente, na obtenção do traço da superfície com um plano coordenado anula-se a variável que não figura no plano considerado.



Exemplo

“Quem não cresce pelo amor, crescerá pela dor.”

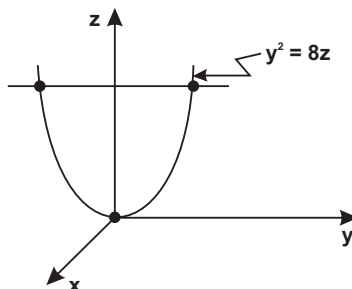
Sabedoria popular

1. Achar os traços da superfície quádrica (denominada parabolóide) $x^2 + y^2 = 8z$.

a) **no plano yz**

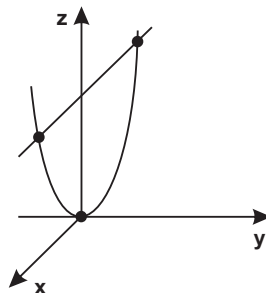
Substituindo $x = 0$ na equação dada tem-se $y^2 = 8z$, a qual representa uma parábola no plano yz .

A parábola é o traço da superfície no plano yz .



b) no plano xz

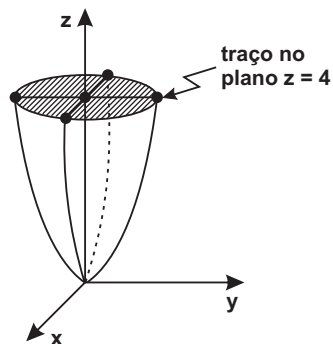
Na equação dada fazendo $y = 0$ tem-se a parábola $x^2 = 8z$, que é o traço da superfície no plano xz .

**c) no plano xy**

Para $z = 0$ resulta a equação $x^2 + y^2 = 0$, só verificada pelo ponto $O = (0, 0)$.

d) no plano $z = 4$

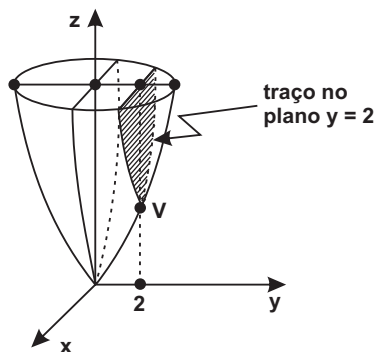
Levando $z = 4$ na equação da superfície quádrlica resulta a equação $x^2 + y^2 = 32$, a qual representa um círculo no plano $z = 4$.

**e) no plano $y = 2$**

Para $y = 2$, a equação dada se transforma em $x^2 + 4 = 8z$ ou $x^2 = 4(2z - 1)$, a qual representa uma

parábola de vértice $V = \left(0, 2, \frac{1}{2}\right)$,

no plano $y = 2$.

**Obs.:**

A equação da quádrlica $x^2 + y^2 = 8z$ só tem existência real (domínio) para $z \geq 0$ e é simétrica em relação aos planos yz e xz .

2. Dada a superfície quádrlica $x^2 + z - 4 = 0$, calcular:

a) **as interseções com os eixos cartesianos:**

Resolução:

- com o eixo $x \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$
- com o eixo $y \Rightarrow$ não há interseção
- com o eixo $z \Rightarrow z - 4 = 0 \Rightarrow z = 4$

b) **os traços nos planos coordenados:**

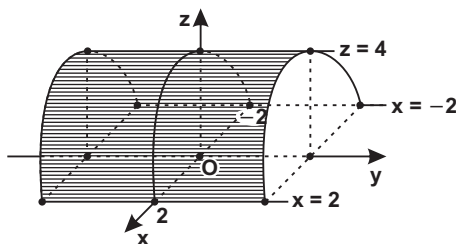
- no plano xy ($z = 0$) $\Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow$ retas de equações $x = 2$ e $x = -2$
- no plano xz ($y = 0$) \Rightarrow parábola $x^2 = 4 - z$ de vértice $V = (0, 0, 4)$ e concavidade voltada para baixo.
- no plano yz ($x = 0$) \Rightarrow reta $z = 4$.

c) **a condição de existência (domínio)**

A superfície quádrlica $x^2 = 4 - z$ só tem existência para $4 - z \geq 0$ ou $z \leq 4$.

d) **a simetria:** A quádrlica $x^2 + z - 4 = 0$ é simétrica em relação aos planos xz e yz e em relação ao eixo z .

e) **a figura** (denominada superfície cilíndrica parabólica):



Exercícios

“El amor es la sabedoria del tonto y la locura del sabio.”

Provérbio espanhol

01. Obter os pontos de interseção da quádrlica $x^2 + y^2 + z^2 - 5x + 6y + z + 6 = 0$ (esfera) com o eixo das abscissas.

Resp.: $(2, 0, 0)$ e $(3, 0, 0)$

02. Dada a equação da superfície quádrlica $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2x + 7y - 4z - 21 = 0$, identificar a equação do traço no plano $y = 2$.

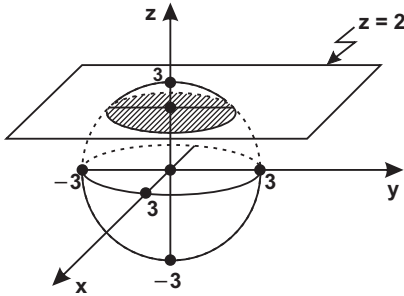
Resp.: Equação do traço no plano $y = 2$: $x^2 + z^2 + 2x - 4z + 1 = 0$, que representa uma circunferência de $C = (-1, 2, 2)$ e $R = 2$.

03. Achar a equação do traço da quádrlica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ (esfera de $R = 3$):

- a) no plano $z = 2$;
- b) no plano xy . Representar graficamente.

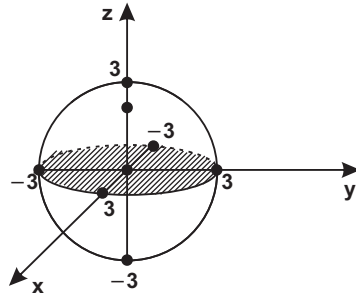
Resp.

a)



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ z = 2 \end{cases} \text{ (circunf.)}$$

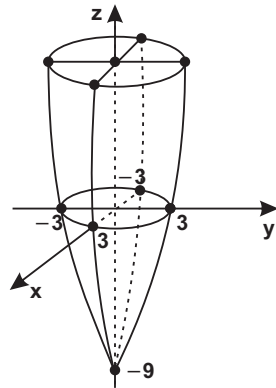
b)



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases} \text{ (circunf.)}$$

04. A figura ao lado representa um parabolóide (superfície quádrlica). Considerando as interseções com os eixos e planos cartesianos, bem como o domínio, a sua equação pode ser:

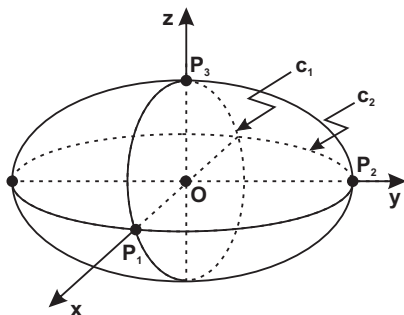
- a) $x^2 + y^2 - z + 9 = 0$
- b) $x^2 + 2y^2 - z - 9 = 0$
- c) $x^2 + y^2 - z - 9 = 0$
- d) $2x^2 + y^2 - z - 9 = 0$



Resp.: c

05. Tem-se abaixo uma superfície quádrlica de equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1 \text{ (elipsóide). Pedem-se:}$$



- as coordenadas dos pontos P_1 , P_2 e P_3 ;
- a equação da curva c_1 ;
- a equação da curva c_2 ;
- o estudo da simetria.

Resp.:

a) $P_1 = (2, 0, 0)$; $P_2 = (0, 5, 0)$ e $P_3 = (0, 0, 3)$;

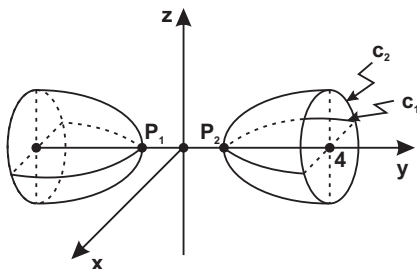
b) $c_1 \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 & \text{(elipse no plano } xz); \\ y = 0 \end{cases}$

c) $c_2 \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1 & \text{(elipse no plano } xy); \\ z = 0 \end{cases}$

- d) a superfície é simétrica em relação à origem; também o é em relação aos eixos e planos cartesianos.

06. Figura-se no presente exercício uma superfície quádrlica de

$$\text{equação } \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{3} = 1 \text{ (hiperboloide de duas folhas). Pedem-se:}$$



- as coordenadas de P_1 e P_2 ;
- a equação da curva c_1 ;
- a equação da curva c_2 ;
- a simetria em relação aos eixos e planos coordenados e à origem.

Resp.:

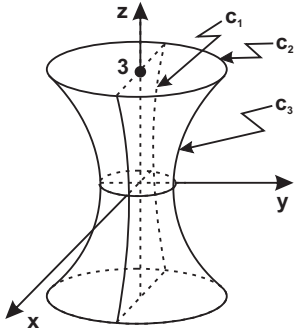
a) $P_1 = (0, -\sqrt{2}, 0)$ e $P_2 = (0, \sqrt{2}, 0)$;

b) $c_1 \begin{cases} \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = 1 & \text{(hipérbole no plano } xy); \\ z = 0 \end{cases}$

c) $c_2 \begin{cases} \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1 & \text{(elipse no plano } y = 4); \\ y = 4 \end{cases}$

d) a superfície é simétrica em relação aos eixos coordenados, planos coordenados e à origem.

07. No presente exercício figura-se uma superfície cognominada hiperboloide de uma folha, cuja equação é $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$. Solicitam-se:



- a) os pontos de interseção com os eixos x , y e z ;
 b) a equação da curva c_1 ;
 c) a equação da curva c_2 ;
 d) a equação da curva c_3 ;
 e) o estudo da simetria.

Resp.:

a) $(2, 0, 0)$; $(-2, 0, 0)$; $(0, 2, 0)$; $(0, -2, 0)$; não há interseção com o eixo z ;

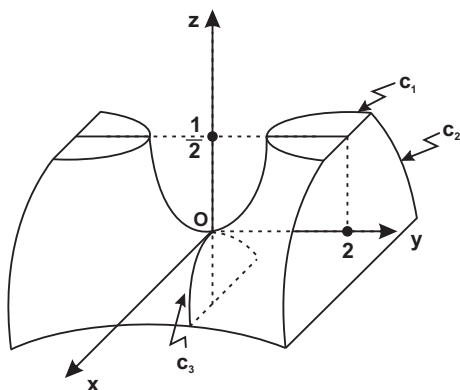
b) $c_1 \begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1 & \text{(hipérbole no plano } xz); \\ y = 0 \end{cases}$

c) $c_2 \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 & \text{(círculo de } R = 2\sqrt{2} \text{ no plano } z = 3); \\ z = 3 \end{cases}$

d) $c_3 \begin{cases} \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1 & \text{(hipérbole no plano } yz); \\ x = 0 \end{cases}$

e) A quádrlica é simétrica em relação à origem. Também o é em relação aos eixos e planos cartesianos.

08. Abaixo representa-se a quádrlica $z = -\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4}$ (paraboloide hiperbólico ou sela de cavalo). Pedem-se:



- a) a equação da curva c_1 ;
 b) a equação da curva c_2 ;
 c) a equação da curva c_3 .

Resp.:
 a)
$$\begin{cases} \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{1} = 1 & \left(\text{hipérbole no plano } z = \frac{1}{2} \right); \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

 b)
$$\begin{cases} x^2 = -z + 1 & \text{(parábola de concavidade voltada para baixo e} \\ y = 2 & \text{V} = (0, 2, 1)) \end{cases}$$

 c)
$$\begin{cases} x^2 = -z & \text{(parábola de concavidade voltada para baixo e} \\ y = 0 & \text{V} = (0, 0, 0)) \end{cases}$$

TEMPOS DE GLOBALIZAÇÃO

Certo dia, ao querer respirar os ares do mundo, o rato saiu de seu esconderejo. Após um tempo de silêncio absoluto, ouviu um latido. E pensou: "se há cachorro, é porque o gato anda longe...". Qual o quê! Mal olhou para o lado e só ouviu o miado valente do gato abocanhando-lhe a um só golpe. Ainda assim, o rato conseguiu perguntar:

– Desde quando você é bicho que late?

A resposta do gato foi contundente:

– Nestes tempos de globalização, quem não fala duas línguas, morre de fome...

PROMOVER A FLUÊNCIA DIGITAL É IMPRESCINDÍVEL

Um escritor espanhol do século XVIII dizia que, se rei fosse, determinaria às escolas não mais disciplinas de oratória, e sim de “escutatória”. Parafraçando, em analogia, eu diria que, se rei fosse, universalizaria, em escolas públicas e privadas, ações metodológicas capazes de desenvolver a fluência digital e uma elevada cultura tecnológica.

Se algumas de nossas escolas já estão navegando na Educação 4.0 – alinhada às demandas da Indústria 4.0, como inteligência artificial, robótica, programação, espaços maker, gamificação do ensino –, no outro extremo temos escolas cuja única “revolução” se limita a passar do quadro de giz para a lousa branca – que em tom jocoso se diz Educação 2.0.

Evidentemente, transformar essa realidade das escolas brasileiras demanda vultosos investimentos, uma política de longo prazo e uma intensa capacitação de professores e gestores, para que, ao longo da trajetória escolar, todos os alunos desenvolvam a fluência digital, uma das mais importantes competências do mundo contemporâneo.

Em visita oficial de nove dias ao Vale do Silício em 2018, praticamente em todas as palestras a fluência digital foi enaltecida e apresentada como requisito indispensável para sobrevivência no mundo atual, ao lado das soft skills (competências socioemocionais), as quais não enfoco neste texto.

Assim como a internet foi um poderoso agente de transformação em nosso *modus vivendi et operandi* – a ponto de alguns dividirem a história em a.w. (antes da web) e d.w. (depois da web) –, muito mais disruptivo e célere será o impacto da Indústria 4.0 na vida e no trabalho. E cabe à escola preparar seus alunos para esse cenário já inserido em nosso cotidiano, dando a eles capacidades e habilidades necessárias para atender às novas demandas do mercado de trabalho.

Em outra frente, apesar de ainda encontrar resistências, já é realidade crescente no Brasil e no mundo o ensino híbrido (ou *blended*, ou *semipresencial*), modalidade que combina tanto o professor em sala de aula orientando e expondo conteúdos quanto o discente estudando remotamente em plataformas digitais.

Em nosso país, no entanto, essa pujança da EaD (rubrica na qual se inserem os cursos híbridos, pelos critérios do MEC) é mais notória no Ensino Superior, o que se constata pela

quantidade de calouros da modalidade em nossas faculdades: 1,2 milhão em 2019, o que corresponde a um terço das novas matrículas, sendo as projeções da ABMES, para 2023, de equivalência à oferta presencial. Ademais, há ainda outros 5 a 7 milhões de jovens e adultos em cursos livres e de pós-graduação ofertados a distância.

Na Educação Básica, um primeiro avanço foi dado no Ensino Médio, para o qual, ao final de 2018, o Conselho Nacional de Educação determinou carga horária de até 20% a distância. Aos estudantes do noturno, até 30% e, aos da EJA, até 80%. A iniciativa é louvável, pois, no ambiente virtual de aprendizagem, desenvolvem-se características muito valorizadas no mercado de trabalho: disciplina pessoal, gestão do tempo, autodidatismo, fluência digital, foco, maturidade para não embicar para o sedutor mundo digital das redes sociais e outras distrações.

Entretanto, especialmente até o 5º ano do Ensino Fundamental, a presença afetiva e cuidadora dos professores é imprescindível para a aprendizagem dos conteúdos e desenvolvimento das habilidades psicomotoras. Nessa etapa, a tecnologia deve ter um papel mais coadjuvante por meio de jogos eletrônicos, aplicativos apropriados à idade e lousas interativas que agucem a curiosidade e favoreçam a ludicidade.

Desenvolver uma boa e universal fluência digital é cada vez mais necessário para a empregabilidade e o desenvolvimento do país. Um estudo que mensura a competitividade entre os países feito pelo IMD, conceituada escola de negócios da Suíça, coloca o Brasil na 57ª posição entre 63 economias. Esperávamos estar democratizando as oportunidades com as novas tecnologias, mas isso não está ocorrendo em virtude de nossas deletérias desigualdades sociais. Escola e governo precisam assumir as relevantes responsabilidades que lhes cabem, para que as transformações pelas quais o mundo passa sejam oportunidades em vez de obstáculos, inclusão em vez de exclusão, diminuição das desigualdades em vez de intensificação delas.

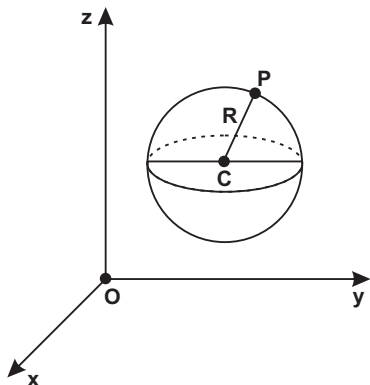
O autor

1. INTRODUÇÃO

No estudo analítico, os termos círculo e circunferência são empregados sem a distinção que faz a Geometria propriamente dita. Destarte, reporta-se à equação $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ como a equação de uma circunferência ou então, de um círculo de centro $C = (\alpha, \beta)$ e raio R . Analogamente, utilizar-se-á indistintamente os termos esfera e superfície esférica. Ipso facto, empregaremos adiante indistintamente os termos cilindro e superfície cilíndrica, bem como cone e superfície cônica.

2. DEFINIÇÃO

Superfície esférica ou esfera é o lugar geométrico dos pontos do E^3 , cuja distância a um ponto fixo (centro) é constante.



Fixado o sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no E^3 , seja $C = (\alpha, \beta, \gamma)$ o ponto fixo, $P = (x, y, z)$ um ponto genérico da superfície esférica e $R > 0$ o raio. Analiticamente tem-se:

$$d(C, P) = R$$

$$\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2} = R$$

ou

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2 \quad (I)$$

Desenvolvendo a equação acima:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0 \quad (II)$$

onde $\delta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2$.

Reciprocamente, uma equação do 2.º grau nas variáveis x , y e z representa uma superfície esférica se:

- 1) os coeficientes de x^2 , y^2 e z^2 forem iguais e não nulos;
- 2) a equação não contiver termos em xy , xz e yz ;
- 3) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta > 0$.

3. CÁLCULO DO CENTRO E DO RAIOS

Dada a equação da esfera: $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$ (III)
Comparando (II) e (III) tem-se:

$$-2\alpha = A \Rightarrow \alpha = \frac{A}{-2}$$

$$-2\beta = B \Rightarrow \beta = \frac{B}{-2}$$

$$-2\gamma = C \Rightarrow \gamma = \frac{C}{-2}$$

$$\delta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2 = D \Rightarrow R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - D}$$

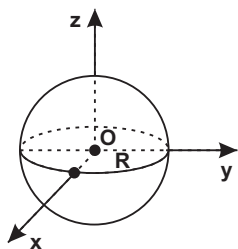
Obs.:

O radicando $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - D$ pode ser:

- 1) positivo e a eq. (II) representa uma esfera real;
- 2) nulo e a eq. (II) representa um ponto;
- 3) negativo e a eq. (II) representa uma esfera imaginária.

4. CASOS PARTICULARES

a) Esfera com centro na origem $O = (0, 0, 0)$



Em (I) fazendo $\alpha = \beta = \gamma = 0$, obtém-se:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

que é a equação de uma esfera com centro na origem do sistema cartesiano e raio R.

b) Esfera que passa pela origem $O = (0, 0, 0)$

A terna $(0, 0, 0)$ verifica a eq. (II) $\Leftrightarrow \delta = 0$. Destarte, a equação de uma esfera que passa pela origem é desprovida de termo independente.

Exercícios Resolvidos

“Não é difícil ser bom; o difícil é ser justo.”

Victor Hugo (1802-1885), escritor francês.

1. Calcular o centro e o raio da esfera:
 $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 18y - 9z + 18 = 0$

RESOLUÇÃO:

a) Cálculo do centro da esfera

Dividindo a equação dada por 3:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 3z + 6 = 0$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A & B & C & D \end{array}$$

$$\alpha = \frac{A}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\beta = \frac{B}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$$

$$\gamma = \frac{C}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

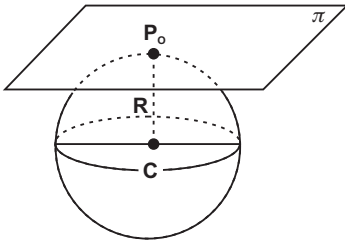
$$\text{Então o centro é } C = \left(1, -3, \frac{3}{2}\right)$$

b) Cálculo do raio

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - D = 1 + 9 + \frac{9}{4} - 6 = \frac{25}{4} \Rightarrow R = \frac{5}{2}$$

2. Achar a equação da esfera de $C = (1, 0, 3)$ e tangente ao plano $\pi: 2x + y - 2z + 1 = 0$.

RESOLUÇÃO:

a) $R = d(C, \pi)$ 

Fórmula da distância de ponto a plano:

$$R = d(C, \pi) = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$R = \frac{|2(1) + 1(0) - 2(3) + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{3}{3} = 1$$

b) Equação da esfera de $C = (1, 0, 3)$ e $R = 1$

$$(x - 1)^2 + (y - 0)^2 + (z - 3)^2 = 1$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6z + 9 = 0 \text{ (Resp.)}$$

3. Calcular a equação da superfície esférica que passa pelos pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ e $D = (1, 2, 3)$.

RESOLUÇÃO:

Quatro pontos não coplanares determinam uma esfera. Equação da esfera procurada:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0$$

a) $A = (1, 0, 0) \in$ esfera:

$$1 - 2\alpha + \delta = 0 \quad \textcircled{1}$$

b) $B = (0, 1, 0) \in$ esfera:

$$1 - 2\beta + \delta = 0 \quad \textcircled{2}$$

c) $C = (0, 0, 1) \in$ esfera:

$$1 - 2\gamma + \delta = 0 \quad \textcircled{3}$$

d) $D = (1, 2, 3) \in$ esfera:

$$1 + 4 + 9 - 2\alpha - 4\beta - 6\gamma + \delta = 0 \quad \textcircled{4}$$

e) De $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ e $\textcircled{3}$:

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\delta + 1}{2} \quad \textcircled{5}$$

f) Levando $\textcircled{5}$ em $\textcircled{4}$ obtém-se:

$$\delta = \frac{8}{5} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \frac{13}{10} \quad \textcircled{6}$$

g) Substituindo $\textcircled{6}$ na equação da esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{13x}{5} - \frac{13y}{5} - \frac{13z}{5} + \frac{8}{5} = 0$$

ou

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 13x - 13y - 13z + 8 = 0 \text{ (Resp.)}$$

Exercícios

“Aqueles que não querem fazer devem abrir caminho para aqueles que estão fazendo.”

Do filme de motivação Paradigmas.

1. Dada a equação da esfera $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 2y + 6z + 1 = 0$, pedem-se: a) o raio; b) a área da superfície esférica; c) o volume da esfera.

Resp.: a) $R = \sqrt{3}$; b) $S = 4\pi R^2 = 12\pi \text{ u.a.}$; c) $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\sqrt{3}\pi \text{ u.v.}$

2. Achar a equação da esfera de diâmetro AB, sendo $A = (1, 2, -3)$ e $B = (3, 4, 9)$.

$$\text{Resp.: } (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 38$$

3. Dê as condições para que a quádriga $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$ represente uma superfície esférica.

$$\text{Resp.: } A = B = C \neq 0 \text{ e } D = E = F = 0$$

4. Determinar a equação da esfera de centro $C = (1, -2, -5)$ e que passe pela origem.

$$\text{Resp.: } x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 10z = 0$$

5. Obter a equação da esfera de $C = (-2, -3, 1)$ e tangente ao plano yz.

$$\text{Resp.: } (x + 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 4$$

6. Seja $C = (2, 3, 5)$ o centro de uma esfera. Calcular a equação de sua superfície, sabendo que a esfera é tangente ao plano cartesiano xy.

$$\text{Resp.: } x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 10z + 13 = 0$$

7. Calcular a equação da esfera que seja concêntrica à esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 6z - 16 = 0$ e que passe pelo ponto $P = (1, 4, -3)$.

$$\text{Resp.: } (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 38$$

8. Obter a equação da esfera que passe pela origem do sistema cartesiano e seja concêntrica com $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8y + 2z + 1 = 0$.

$$\text{Resp.: } (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{4}$$

9. Verificar se as equações abaixo representam esferas reais, imaginárias, um ponto ou não representam esferas:

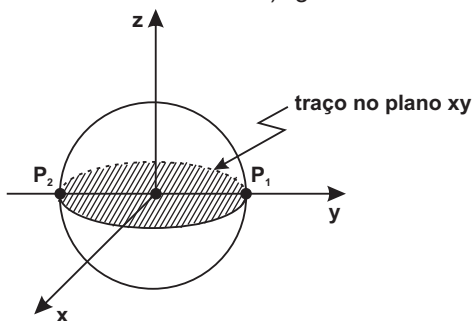
- a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 5z - 3 = 0$
- b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 14 = 0$
- c) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - y + 2z + 10 = 0$
- d) $x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 2y + 3z - 5 = 0$
- e) $x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + z - 2 = 0$

Resp.: a) esfera real; b) um ponto $P = (1, 2, -3)$; c) uma esfera imaginária; d) não é esfera; e) não é esfera.

10. Dada a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, calcular:

- a) os pontos de interseção da esfera com o eixo das ordenadas;
- b) a curva de interseção da esfera com o plano xy ;
- c) fazer a figura.

Resp.: a) $P_1 = (0, 5, 0)$ e $P_2 = (0, -5, 0)$;
 b) $x^2 + y^2 = 25$ (círculo de $R = 5$);
 c) figura:



11. Calcular o valor de k para que a equação

$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + z + k = 0$ represente uma esfera de raio 2.

Resp.: $k = \frac{-47}{8}$

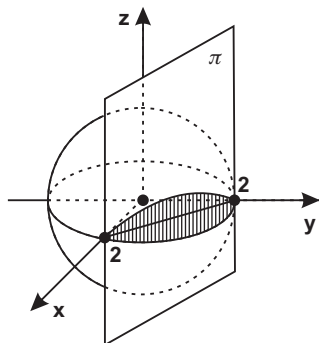
12. Obter a equação da curva interseção da esfera

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 3 = 0$ com o plano cartesiano xy .

Resp.: círculo: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

13. Achar a equação da curva interseção da esfera com o plano

paralelo ao eixo z , ao lado figurados.



Resp.: círculo: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ (esfera)} \\ x + y - 2 = 0 \text{ (plano)} \end{cases}$

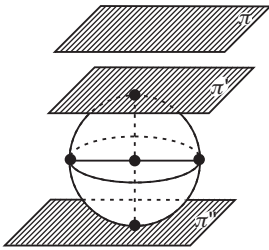
14. Conhecida a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 3 = 0$, obter a equação de uma esfera concêntrica à mesma e tangente ao plano $x + y - z + 1 = 0$.

$$\text{Resp.: } (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = \frac{16}{3}$$

15. Obter a equação dos planos tangentes à superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ e que sejam paralelos ao plano $\pi: 2x - y - z + 1 = 0$.

$$\text{Resp.: } 2x - y - z \pm \sqrt{6} = 0$$

SUGESTÃO:



- a) Centro e raio da esfera: $C = (1, 2, 0)$ e $R = 1$
- b) Equação de π' : $2x - y - z + d = 0$
- c) $d(C, \pi') = R$

$$\frac{|2(1) + (-1)2 + (-1)0 + d|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = 1 \Rightarrow d = \pm\sqrt{6}$$

Série B

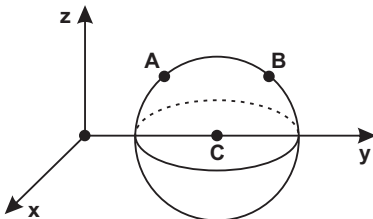
“Duvidar de tudo ou acreditar em tudo são atitudes preguiçosas. Elas nos dispensam de refletir.”

Henri Poincaré - matemático francês.

16. Obter a equação da esfera que passa pelos pontos $A = (1, 0, 2)$ e $B = (3, 1, 5)$ e cujo centro se encontra sobre o eixo y .

$$\text{Resp.: } x^2 + (y - 15)^2 + z^2 = 230$$

SUGESTÃO:



- a) Centro da esfera $C = (0, y, 0)$

b) $d(C, A) = d(C, B)$

$$y = 15$$

c) $R = d(C, A) = \sqrt{230}$

17. Uma superfície esférica passa pelos pontos $P_1 = (0, 0, 2)$, $P_2 = (1, 0, 2)$ e $P_3 = (1, 3, 3)$ e tem o centro no plano xz . Calcule a sua equação.

$$\text{Resp.: } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + (z - 7)^2 = \frac{101}{4}$$

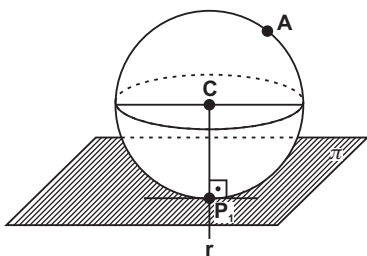
18. Achar a equação da esfera que passa pelos pontos $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, 1, 2)$ e $C = (1, 0, 2)$ e cujo centro pertence ao plano xy .

$$\text{Resp.: } (x - 2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{21}{4}$$

19. Calcular a equação da esfera que passe pelo ponto $A = (0, 3, 2)$ e tangente ao plano $\pi: x + y - z = 0$ no ponto $P_1 = (0, 1, 1)$.

$$\text{Resp.: } \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{75}{4}$$

SUGESTÃO:



a) Equação de r : lembremos da equação de uma reta que passa por um ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e que seja perpendicular ao plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$ (vide cap. 8 do livro Álgebra vetorial e G.A.).

$$r: \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

No exercício em pauta:

$$r: \frac{x - 0}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 1}{-1}$$

b) Mas o centro $C = (\alpha, \beta, \gamma) \in r$:

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{\beta - 1}{1} = \frac{\gamma - 1}{-1} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha = \beta - 1 \\ \beta = -\gamma + 2 \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

c) Mas a $d^2(C, A) = d^2(C, P_1)$
 $(\alpha - 0)^2 + (\beta - 3)^2 + (\gamma - 2)^2 = (\alpha - 0)^2 + (\beta - 1)^2 + (\gamma - 1)^2 \quad \textcircled{2}$

Substituindo $\textcircled{1}$ em $\textcircled{2}$: $C = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{-3}{2}\right)$

d) $R = d(C, P_1) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

20. Uma esfera é passante por $A = (0, 2, 3)$ e tangente ao plano $x + y + z - 3 = 0$ em seu ponto $B = (0, 1, 2)$. Obtenha a equação da esfera.

$$\text{Resp.: } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

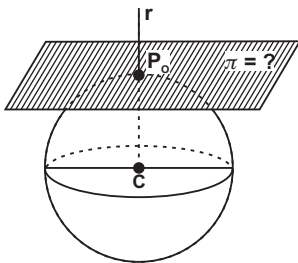
21. Calcular a equação da esfera que passa pelo ponto $A = (2, 3, 5)$ e é tangente ao plano $\pi: x + y + z - 3 = 0$ no ponto $B = (1, 0, 2)$.

$$\text{Resp.: } \left(x - \frac{33}{14}\right)^2 + \left(y - \frac{19}{14}\right)^2 + \left(z - \frac{47}{14}\right)^2 = \frac{1083}{196}$$

22. Achar a equação do plano π tangente à esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z = 0$ em seu ponto $P_o = (1, 2, 3)$.

$$\text{Resp.: } \pi: x + y - 3z + 6 = 0$$

SUGESTÃO:



a) Cálculo do centro da esfera:

$$C = (2, 3, 0)$$

b) Equação da reta r (reta por dois pontos:

C e P_o):

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-3}$$

$$\text{Donde } \ell = 1, m = 1 \text{ e } n = -3$$

c) Equação do plano π : O plano π é perpendicular à reta r (ver cap. 8, do livro Álgebra Vetorial e Geometria Analítica):

$$\pi: \ell x + m y + n z + d = 0$$

$$: 1(x) + 1(y) + (-3)z + d = 0$$

Mas $P_o = (1, 2, 3) \in \pi$:

$$1(1) + 1(2) - 3(3) + d = 0 \Rightarrow d = 6$$

23. Pede-se a equação do plano tangente à esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8z = 0$ na origem do sistema cartesiano.

$$\text{Resp.: } 3x - 4z = 0$$

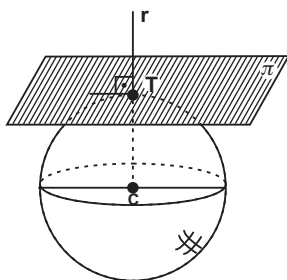
24. Ache o valor de k para que o plano $2x + y - 2z - k = 0$ seja tangente à superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Resp.: $k = \pm 15$

25. A esfera $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 2$ e o plano $\pi: y + z - 1 = 0$ são tangentes no ponto T . Calcular as coordenadas de T .

Resp.: $T = (1, 0, 1)$

SUGESTÃO:



a) Centro da esfera

$$C = (1, -1, 0)$$

b) Cálculo da reta r (reta que passa pelo ponto C e é perpendicular a π):

$$r: \frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$$

c) Cálculo da interseção da reta r com o plano π :

$$\begin{cases} r: \frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1} \\ \pi: y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima:

$$x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 1 \text{ (coord. de } T\text{).}$$

26. Achar o ponto de tangência T da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ com o plano $2x + y - 2z - 15 = 0$.

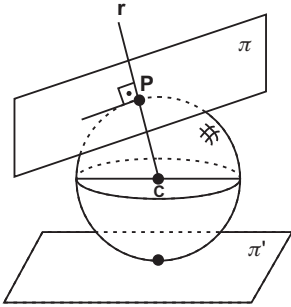
$$\text{Resp.: } T = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, \frac{-10}{3} \right)$$

27. Obter a equação da esfera tangente ao plano $\pi: x + y - 2 = 0$ no ponto $P = (0, 2, 0)$ e também ao plano $\pi': x + z + 1 = 0$.

$$\text{Resp.: } (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 2$$

$$\left(x + \frac{1}{3} \right)^2 + \left(y - \frac{5}{3} \right)^2 + z^2 = \frac{2}{9}$$

SUGESTÃO:



a) Cálculo da reta r (reta que passa por P e é perpendicular ao plano π):

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{0}$$

b) Mas $C = (\alpha, \beta, \gamma) \in r$:

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{\beta-2}{1} = \frac{\gamma}{0}$$

$$\Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \beta = \alpha + 2 \quad \textcircled{1}$$

c) $d(C, \pi) = d(C, \pi')$

$$\left| \frac{1(\alpha) + 1(\beta) + 0(\gamma) - 2}{\sqrt{2}} \right| = \left| \frac{1(\alpha) + 0(\beta) + 1(\gamma) + 1}{\sqrt{2}} \right| \quad \textcircled{2}$$

d) Resolvendo $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$:

$$\alpha = 1 \Rightarrow \beta = 3 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow R = d(C, P) = \sqrt{2}$$

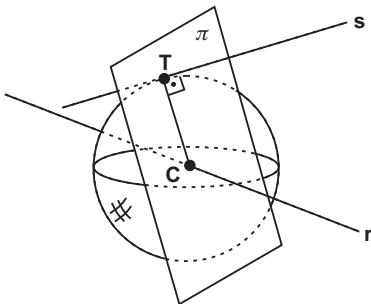
$$\alpha' = \frac{-1}{3} \Rightarrow \beta' = \frac{5}{3} \Rightarrow \gamma' = 0 \Rightarrow R' = d(C', P) = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

28. Uma esfera tem o centro na reta $r: x = y = z$ e é tangente à reta

$s: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$ no ponto $T = (0, 1, 2)$. Calcule a equação da esfera.

$$\text{Resp.: } \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{36}$$

SUGESTÃO:



a) Cálculo de π (plano que passa por T e é perpendicular à reta s):

$$\pi: 2x + 3y + z + d = 0$$

$$T \in \pi \Rightarrow 2(0) + 3(1) + 2 + d = 0$$

$$\Rightarrow d = -5$$

$$\pi: 2x + 3y + z - 5 = 0$$

b) Cálculo de C:

$$\begin{cases} r: x = y = z \\ \pi: 2x + 3y + z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow C = \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6} \right)$$

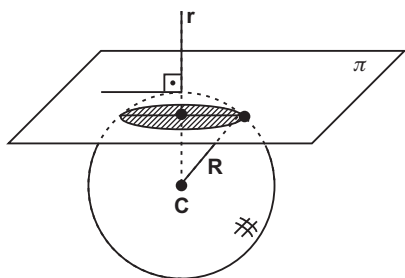
c) Cálculo de R:

$$R = d(C, T) = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

29. Achar o centro e o raio do círculo interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y = 0$ com o plano $\pi: x + 2z + 1 = 0$.

$$\text{Resp.: } C' = \left(\frac{11}{5}, 1, \frac{-8}{5} \right) \text{ e } R' = \frac{\sqrt{170}}{5}$$

SUGESTÃO:



a) Centro e raio da esfera:

$$C = (3, 1, 0) \text{ e } R = \sqrt{10}$$

b) Cálculo da reta r (reta que passa por C e é perpendicular a π):

$$r: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{2}$$

c) Cálculo de C':

$$\begin{cases} r: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{2} \\ \pi: x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$y = 1 \Rightarrow x = \frac{11}{5} \Rightarrow z = \frac{-8}{5} \text{ (coordenadas do centro } C').$$

d) Cálculo de R':

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$R'^2 = R^2 - d^2(C, C')$$

30. Achar o centro e o raio do círculo interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6z = 14$ com o plano $x + y - 4 = 0$.

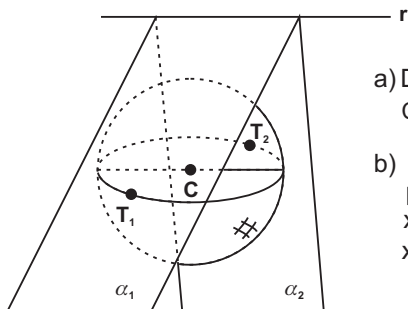
$$\text{Resp.: } C' = (3, 1, 3) \text{ e } R' = 5$$

31. Obter as equações dos planos conduzidos pela reta

$$r: \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} \text{ e tangentes à esfera } x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4 = 0.$$

$$\text{Resp.: } x + 2y + z - 5 = 0 \text{ e } 2x + y - z - 7 = 0$$

SUGESTÃO:



a) Da esfera

$$C = (1, -1, 0) \text{ e } R = \sqrt{6}$$

b) Equação do feixe de planos que passam por r:

$$x - z - 3 + \lambda(y + z - 1) = 0 \text{ ou}$$

$$x + \lambda y + (-1 + \lambda)z - 3 - \lambda = 0 \text{ (plano } \pi)$$

c) $d(C, \pi) = R$

·
·
·

$$\lambda_1 = 2 \text{ ou } \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

CRITÉRIOS

O leão reuniu a bicharada, no aprazível córrego da floresta, para definir quem seria o rei da selva.

Sem cerimônias, determinou o único requisito para concorrer:

– Tem que ter juba! Quem tem juba? - Um a um, os animais foram desistindo.

Até que um deles se manifestou:

– Oba! Oba! Eu tenho juba! - saltitou de alegria o mico-leão dourado.

– Você não vale! Você é macaco - rebateu, de pronto, o leão.

Moral da história: muitas vezes, os critérios são estabelecidos ao sabor das conveniências.

Adaptado pelo autor.

OS VERDADEIROS LÍDERES NÃO TÊM O APLAUSO DO SEU TEMPO, MAS O TÊM DA HISTÓRIA.

"Nas veias dos demagogos não corre o leite da ternura humana e sim, o vinagre da burrice ou o veneno da hipocrisia."

Roberto Campos (1917-2001)

Há governantes, líderes comunitários, empresários que vão além do seu tempo, deixando para trás uma maioria míope e reivindicadora. Têm postura de estadistas. São alvos da incompreensão, maledicência, isolamento e agressões. Num movimento pendular sobre suas cabeças, a espada de Dâmocles oscila entre o desagradável e o plausível.

Quando os bons dirigentes propõem mudanças, encontram uma resistência feroz por parte de muitos e o apoio tímido de uns poucos. Confortam-se com o dever cumprido e com o julgamento da posteridade. Sim, a História – essa "juíza imparcial" – repara injustiças, mas tem o péssimo hábito de andar tão devagar que raramente alcança os grandes líderes em vida.

Há um descompasso entre o aplauso do seu tempo e o aplauso da História. Destarte, o populismo e a demagogia aliciam os líderes fracos como o canto da sereia. "Ainda não descobri a maneira infalível de governar. Mas aprendi a fórmula certa de fracassar: querer agradar a todos, ao mesmo tempo" – discursava apropriadamente John F. Kennedy (1917-1963), meses antes de ser abatido por tiros certos em Dallas.

Em 44 a.C., o mais renomado imperador romano, Caio Júlio César, foi atraído por 23 punhaladas, vítima de uma conspiração. Suas palavras derradeiras demonstram antes de tudo um coração dilacerado pela ingratidão, especialmente de Brutus, filho único e adotivo: Tu quoque, Brutus, fili mi! (Até tu, Brutus, filho meu!).

"Você pode enganar todo o povo durante algum tempo e parte do povo durante todo o tempo, mas não pode enganar todo o povo todo o tempo" – se faz oportuno Abraham Lincoln, o mais venerado presidente dos EUA. Poucos desconhecem as suas vicissitudes: perdeu para Deputado Estadual, Deputado Federal, Senador e foi assassinado por um fanático sulista em um teatro de Washington. Lincoln costumava repetir que se fosse responder a todas as críticas que lhe eram dirigidas, não

trataria de mais nada.

Winston Churchill, ao assumir o governo de coalizão em 1940, proclamou em seu histórico discurso: I have nothing to offer but blood, toil, sweat and tears (Eu não tenho nada a oferecer, a não ser sangue, trabalho, suor e lágrimas). Churchill hodiernamente considerado o maior líder do século XX, conheceu o gosto amargo do ostracismo e da ingratidão dos ingleses: sofreu derrotas em 4 eleições.

E o que dizer do maior estadista indiano? Para Mahatma Gandhi, a pobreza é a pior forma de violência. Acusado de traidor por fanáticos hindus, em 1948 foi vitimado pelas balas de um deles. Logo ele, o apóstolo da não-violência, que costumava catequizar: "olho por olho e o mundo acabará inteiramente cego."

Também se faz apropriado uma breve incursão no reino animal. Em algumas regiões inóspitas da Ásia, há manadas de cavalos selvagens que galopam céleres as pradarias e montanhas guiados por um deles. É o cavalo líder e, quando este expõe os demais a uma situação de grande risco de vida, toda a tropa golpeia o líder com coices e patadas.

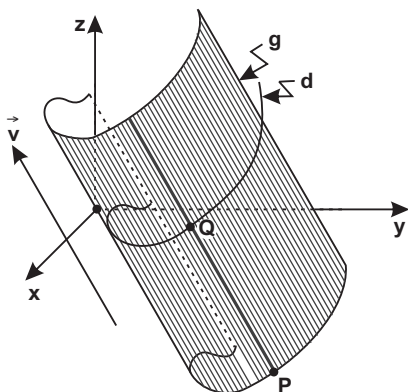
Um bando de macacos sempre escolhe um líder-olheiro, experiente e vivaz. Este é severamente punido se for negligente, não alertando a tempo a iminência de um perigo ou razia. Se os animais são implacáveis com os erros e omissões de suas lideranças, nós, racionais, não deixamos por menos.

Parafraçando Dante, os piores lugares do inferno deveriam ser reservados a governantes populistas, pois geram miséria, inflação e comprometem gerações. O conspícuo filósofo grego Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C.) já advertia que "a demagogia é a perversão da democracia".

Do autor

1. DEFINIÇÃO

Superfície cilíndrica ou cilindro é a superfície gerada por uma reta móvel (denominada geratriz) que se apoia sobre uma curva fixa (denominada diretriz), conservando-se paralela a uma direção dada.



Na figura ao lado tem-se:

Diretriz: a diretriz d é representada por uma curva plana fixa no E^3 . A diretriz é dada pela interseção de 2 superfícies:

$$d \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Geratriz: a geratriz g é a reta móvel, cuja direção é a do vetor $\vec{v} = (\ell, m, n)$ e que desliza sobre a diretriz, mantendo a sua direção. Na figura limitou-se o comprimento das geratrizes,

mas deve ficar entendido que elas se prolongam indefinidamente.

A superfície cilíndrica pode ser circular, parabólica, elíptica ou hiperbólica, conforme a diretriz seja um círculo, uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole. Em particular, se a diretriz for uma reta a superfície cilíndrica é um plano.

2. EQUAÇÃO DA SUPERFÍCIE CILÍNDRICA

Retornando à figura, considere:

$P = (X, Y, Z)$ um ponto genérico pertence à geratriz;

$Q = (x, y, z)$ o ponto de interseção da diretriz d com a geratriz que passa por P .

Os vetores $(Q - P)$ e \vec{v} são paralelos:

$$(Q - P) = t\vec{v}$$

$$Q = P + t\vec{v}$$

Substituindo as coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}x &= X + \ell t \\ y &= Y + mt \\ z &= Z + nt\end{aligned}$$

Tais equações denominadas de **paramétricas** são levadas nas equações da diretriz:

$$d \begin{cases} f_1(X + \ell t, Y + mt, Z + nt) = 0 \\ f_2(X + \ell t, Y + mt, Z + nt) = 0 \end{cases}$$

Numa das equações acima isola-se o parâmetro t , o qual é substituído na outra equação, obtendo-se a superfície cilíndrica correspondente, que assume a forma $F = (X, Y, Z) = 0$.

Exercício Resolvido

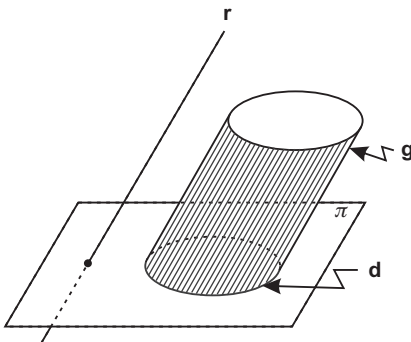
"Seja você mesmo, mas não seja sempre o mesmo."

Gabriel, o Pensador.

Achar a equação do cilindro de geratrizes paralelas à reta

$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}$ e cuja diretriz é a curva de interseção da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com o plano $\pi: x - y + z = 0$.

RESOLUÇÃO:



A interseção do plano π com a esfera é uma circunferência, que constitui a diretriz.

a) Equação paramétricas

Da reta r obtém-se:

$$\ell = 1, m = 3 \text{ e } n = 1$$

Então:

$$x = X + 1 \cdot t$$

$$y = Y + 3 \cdot t$$

$$z = Z + 1 \cdot t$$

b) A diretriz é representada pelas equações:

$$d \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

c) Substituindo as equação paramétricas em d):

$$d \begin{cases} (X+t)^2 + (Y+3t)^2 + (Z+t)^2 = 4 & \textcircled{1} \\ (X+t) - (Y+3t) + (Z+t) = 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

d) Equação da superfície cilíndrica:

Isolando "t" de $\textcircled{2}$:

$$t = X - Y + Z \quad \textcircled{3}$$

Levando $\textcircled{3}$ em $\textcircled{1}$:

$$(2X - Y + Z)^2 + (3X - 2Y + 3Z)^2 + (X - Y + 2Z)^2 = 4$$

ou desenvolvendo-se os quadrados:

$$7X^2 + 3Y^2 + 7Z^2 - 9XY + 13XZ - 9YZ - 2 = 0$$

(Equação que representa uma superfície circular de diretrizes paralelas à reta r).

Exercícios

"A coisa mais importante que um pai pode fazer pelos filhos é amar a mãe deles."

H. Jackson Brown

01. Achar a equação da superfície cilíndrica de geratrizes paralelas ao vetor $\vec{v} = (1, 1, 1)$ e cuja diretriz seja a curva de interseção do plano $x - y + z = 0$ com a superfície quádrlica $x = yz$.

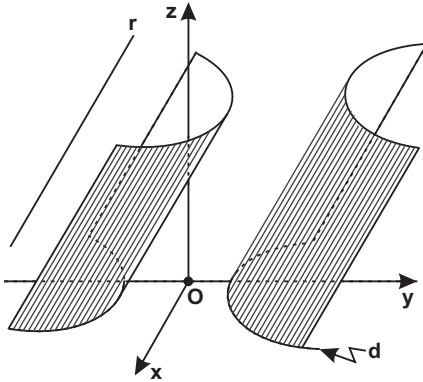
$$\text{Resp.: } X^2 + 2Y^2 + Y - Z - 3XY + XZ - YZ = 0$$

02. Determinar a equação de uma superfície cilíndrica cuja diretriz é a hipérbole $4x^2 - y^2 = 3$, no plano xy , e cujas geratrizes são paralelas à reta

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-2}.$$

$$\text{Resp.: } 4X^2 - Y^2 + \frac{15}{4}Z^2 + 8XZ - YZ - 3 = 0$$

SUGESTÃO:



a) Equações da diretriz:

$$d \begin{cases} 4x^2 - y^2 = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

b) Equações paramétricas:

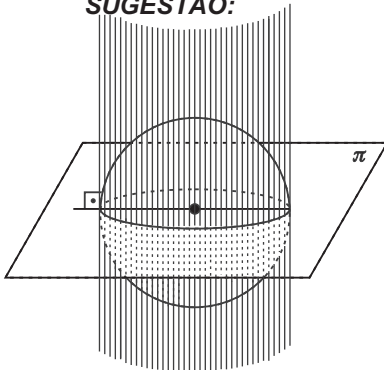
$$\begin{cases} x = X + 2t \\ y = Y + t \\ z = Z - 2t \end{cases}$$

c) Substitua as equações paramétricas nas equações da diretriz.

03. A diretriz de uma superfície cilíndrica é a curva interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com o plano $\pi: x + y - z = 0$. As geratrizes são perpendiculares ao plano π . Escrever a equação da superfície cilíndrica.

Resp.: $X^2 + Y^2 + Z^2 - XY + XZ + YZ - 6 = 0$

SUGESTÃO:



Lembrar-se da condição de ortogonalidade de reta e plano:

$$\ell = a = 1, m = b = 1 \text{ e } n = c = -1$$

04. Calcular a equação da superfície cilíndrica cujas geratrizes são perpendiculares ao plano $2x + y + 3z + 5 = 0$ e cuja diretriz é a curva

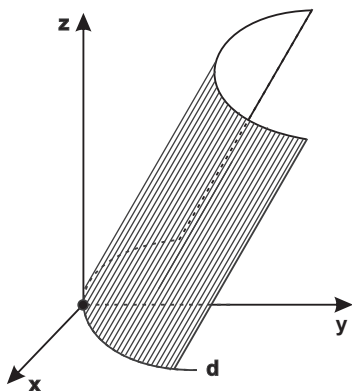
$$d \begin{cases} x^2 - xy^2 + 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Resp.: $(3X - 2Z)^3 - (3X - 2Z)(3Y - Z)^2 + 54 = 0$
(Não é superfície quádrlica)

05. A equação $9x^2 + z^2 - 6xz - 27y + 9z = 0$ representa uma superfície cilíndrica. Determinar a equação da diretriz no plano xy .

Resp.: $d \begin{cases} x^2 = 3y \\ z = 0 \end{cases}$

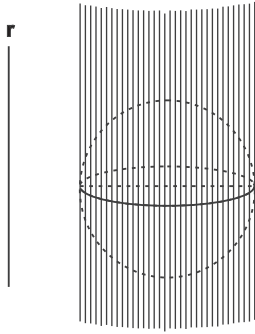
SUGESTÃO:



Só para efeito de ilustração (sem preocupação de escala), observe a figura: trata-se de uma superfície cilíndrica parabólica, cuja diretriz é a parábola $x^2 = 3y$ no plano xy (de equação $z = 0$).

06. Calcular a equação da superfície cilíndrica de geratrizes paralelas à reta $r: \frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$ e circunscreve a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Resp.: $2X^2 + Y^2 + Z^2 - 2YZ - 2 = 0$

SUGESTÃO:

a) Equação paramétricas

$$\begin{cases} x = X \\ y = Y + t \\ z = Z + t \end{cases}$$

b) Substituindo as equações paramétricas na equação da esfera, obtém-se uma equação do 2.º grau em t . A condição de tangência é que o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ da equação do 2.º grau em t seja nulo.

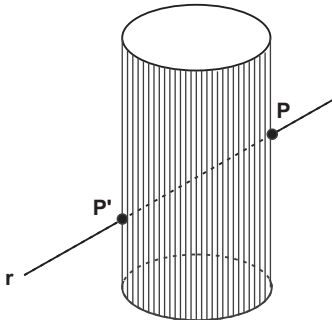
07. Achar a equação da superfície cilíndrica circunscrita ao parabolóide $x = y^2 + z^2$ e cujas geratrizes sejam paralelas à reta r : $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$.

$$\text{Resp.: } 36Y^2 + 16Z^2 - 52X + 8Y + 12Z - 48YZ - 1 = 0$$

08. Pede-se a equação do cilindro cujas geratrizes têm a direção do vetor $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ e que circunscreva a superfície quádrlica $x^2 + y^2 + 2xz - 2 = 0$.

$$\text{Resp.: } X^2 + Y^2 - Z^2 + 2XY + 2YZ + 2XZ - 4 = 0$$

09. A figura abaixo representa uma superfície cilíndrica de equação $x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz - 36 = 0$. Achar as coordenadas dos pontos P e P' , interseção da superfície cilíndrica com a reta r : $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$.



$$\text{Resp.: } P = (4, 4, 2) \text{ e } P' = (-4, -4, -2)$$

SUGESTÃO:

Na equação dada faz-se $x = 2z$ e $y = 2z$.

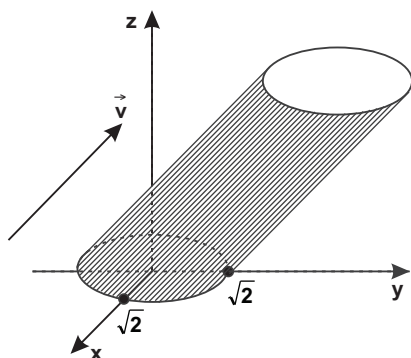
Série B

“Suaviter in modo, fortiter in re.”
 (Suave no modo, forte na ação) – Aforisma Latino.

10. Calcular a direção das geratrizes do cilindro $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz + 2yz - 2 = 0$. Achar também a equação da diretriz no plano xy .

Resp.: $\vec{v} = (1, -1, 1)$ e $d \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (\text{círculo}) \\ z = 0 \end{cases}$

SUGESTÃO:



a) Cortamos a superfície cilíndrica com um dos planos coordenados. Seja xy tal plano, de equação $z = 0$. A diretriz tem equação:

$$d \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

b) O vetor $\vec{v} = (\ell', m', n')$ procurado tem coordenadas proporcionais, e ipso facto, uma das coordenadas pode ser reduzida à unidade:
 $\vec{v} = (\ell, m, 1)$.

c) Equações paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= X + \ell t \\ y &= Y + m t \\ z &= Z + 1 t \end{aligned}$$

d) Levando as equações paramétricas nas equações da diretriz:

$$d \begin{cases} Z + t = 0 \Rightarrow t = -Z & \textcircled{1} \\ (X + t)^2 + (Y + mt)^2 - 2 = 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

e) Substituindo ① em ② :
 $(X - Zt)^2 + (Y - Zt)^2 - 2 = 0$

desenvolvendo:
 $X^2 + Y^2 + (\ell^2 + m^2)Z^2 - 2\ell XZ - 2mYZ - 2 = 0$

f) Comparando esta equação com a equação dada:

$$\begin{cases} \ell^2 + m^2 = 2 & \text{③} \\ -2\ell = -2 \Rightarrow \ell = 1 \\ -2m = 2 \Rightarrow m = -1 \end{cases}$$

③ O sistema é compatível, pois $\ell = 1$ e $m = -1$ verificam a equação e destarte $\vec{v} = (1, -1, 1)$.

Obs.:

Para $z = 0$, tem-se a equação da diretriz no plano xy : $x^2 + y^2 = 2$, que representa um círculo de centro na origem e $R = \sqrt{2}$. Isto posto, a equação dada representa uma superfície cilíndrica circular cujas geratrizes têm a direção do vetor $\vec{v} = (1, -1, 1)$. Na figura, ao se representar o vetor \vec{v} , não houve a preocupação quanto à sua escala. Se o sistema não fosse compatível, a superfície dada não seria cilíndrica.

11. Determinar a reta que passa por $P = (1, 5, -3)$ e que dá a direção das geratrizes do cilindro $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - z^3 + z - 2y = 0$.

$$\text{Resp.: } r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+3}{2}$$

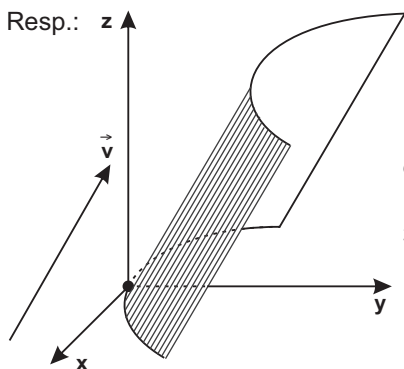
12. Pergunta-se se a equação $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz - 2yz + 3 = 0$ representa uma superfície cilíndrica?

Resp.: A equação dada é a de uma superfície cilíndrica.

13. Verificar se a equação $3x^2 - 6x - 3y - yz + 3 = 0$ representa uma superfície cilíndrica.

Resp.: A equação dada **não** é a de uma superfície cilíndrica (o sistema não é compatível). Veremos no próximo capítulo que se trata de uma superfície cônica.

14. Calcule a diretriz (no plano xy), a geratriz e esboce o gráfico da superfície cilíndrica $16x^2 + z^2 - 8xz - 48y + 12z = 0$.



$$d \begin{cases} x^2 = 3y \\ z = 0 \end{cases}$$

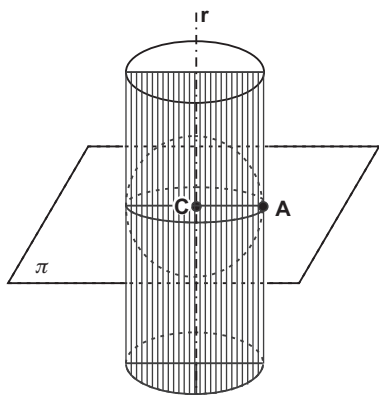
$$\vec{v} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1\right) \text{ ou } \vec{v} = (1, 1, 4)$$

15. Achar a equação da superfície cilíndrica de rotação que passa pelo ponto $A = (2, 0, 1)$ e que tem para eixo a reta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+2}{1}$.

Resp.: $X^2 + 2Y^2 + Z^2 - 2XZ - 6X + 8Y + 6Z + 5 = 0$

SUGESTÃO:

A superfície cilíndrica procurada circunscreve uma esfera de centro $C \in \pi$ e cujo $R = d(C, A)$.



- a) Cálculo do plano π (passa por A e é perpendicular a r):
 $\pi: 1(x) + 0(y) + 1(z) + d = 0$
 Mas $A \in \pi: 1(2) + 0(0) + 1(1) + d = 0 \Rightarrow d = -3$
 $\pi: x + z - 3 = 0$

- b) Equação da esfera:
 Cálculo de C (\cap de π com r)

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = -2 + t \end{cases}$$

- c) Substituindo as equações paramétricas de r na equação de π , obtém-se $t = 2$ e $C = (3, -2, 0)$. Por sua vez $R = d(C, A) = \sqrt{6}$. Destarte, a esfera tem equação $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 0)^2 = 6$.

d) Equações paramétricas das geratrizes (paralelas a r):

$$\begin{cases} x = X + t \\ y = Y \\ z = Z + t \end{cases}$$

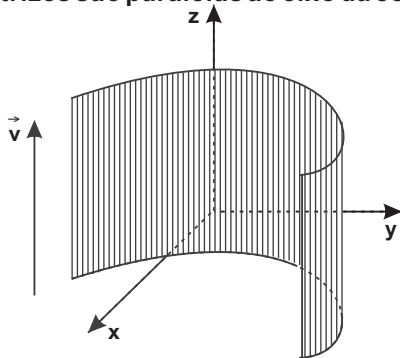
Substituindo as equações paramétricas acima na equação da esfera obtém-se uma equação do 2.º grau em t . Condição de tangência: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

3. SUPERFÍCIE CILÍNDRICA DE GERATRIZES PARALELAS AOS EIXOS CARTESIANOS

Teoria:

Abordaremos um tipo particular de superfície cilíndrica com relevante interesse para o Cálculo Diferencial e Integral:

No espaço tridimensional, uma equação cartesiana a duas variáveis representa uma superfície cilíndrica cujas geratrizes são paralelas ao eixo da coordenada ausente.



Isto posto, a equação $f(x, y) = 0$ representa uma superfície cilíndrica cujas geratrizes têm a direção do eixo z .

A justificativa teórica do que se expõe procede do fato de que as geratrizes sendo paralelas ao eixo z têm a direção do vetor $\vec{v} = (0, 0, n)$. Destarte, no desenvolvimento da teoria no início do presente capítulo substitua o vetor $\vec{v} = (\ell, m, n)$ por $\vec{v} = (0, 0, n)$.

Importante:

A equação $f(x, y) = 0$ apresenta uma dupla interpretação:

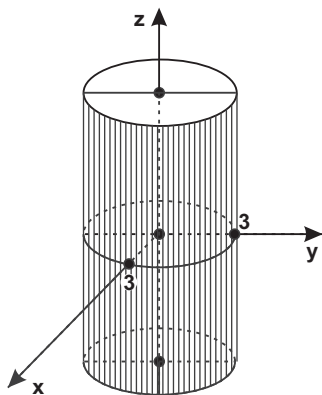
- I) No E^2 , $f(x, y) = 0$ representa uma curva no plano xy ;
- II) No E^3 , $f(x, y) = 0$ representa uma superfície cilíndrica de geratrizes paralelas ao eixo z e curva diretriz

$$d \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Exemplos

“Na verdade, estar só é bom quando a gente quer, não quando falta companhia.”

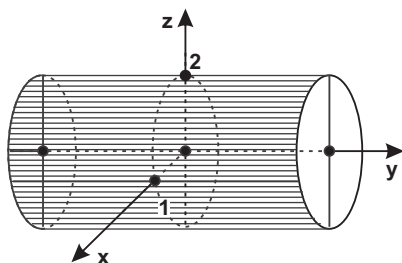
Roberto Shinyashiki (n.1952), psicoterapeuta e escritor.



1. A equação $x^2 + y^2 = 9$ representa no E^3 uma superfície cilíndrica circular, cuja diretriz é um círculo no plano xy (centro na origem e $R = 3$) e as geratrizes são paralelas ao eixo z .
Enfatizando:

$$d \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$$

Dica: aplique as equações dadas na sequência desses exemplos no Geogebra.



2. A superfície $\frac{x^2}{1} + \frac{z^2}{4} = 1$ tem como

diretriz uma elipse no plano xz (com $a = 2$ e $b = 1$) e as geratrizes são paralelas ao eixo y .

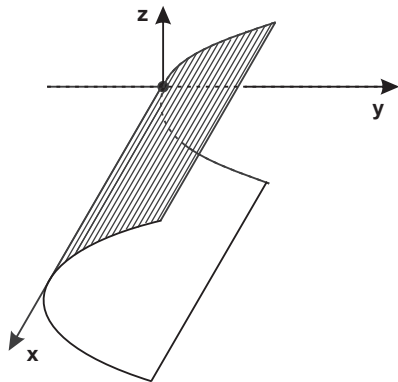
Destaque-se que:

$$d \begin{cases} \frac{x^2}{1} + \frac{z^2}{4} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

3. A superfície $z^2 = 2y$ tem como diretriz uma parábola no plano yz e cujas geratrizes são paralelas ao eixo x .

Equação da diretriz:

$$d \begin{cases} z^2 = 2y \\ x = 0 \end{cases}$$



Obs.:

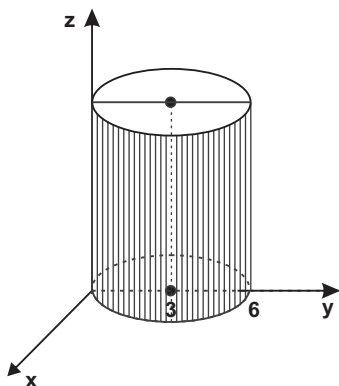
Cumprе salientar, como é do seu conhecimento, que especificamente no E^2 , as equações $x^2 + y^2 = 9$, $\frac{x^2}{1} + \frac{z^2}{4} = 1$ e $z^2 = 2y$ representam cônicas (respectivamente círculo, elipse e parábola).

Exercícios

“As mulheres foram feitas para serem amadas e não compreendidas.”

Oscar Wilde (1854-1900), escritor inglês de origem irlandesa.

01. Abaixo figura-se uma superfície cilíndrica circular, cujas geratrizes são paralelas ao eixo z . Determine a equação da superfície cilíndrica e a equação de sua diretriz.

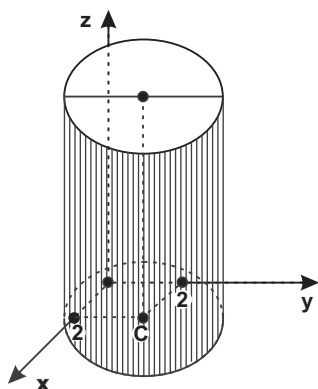


Resp.: $x^2 + y^2 - 6y = 0$ e

$$d \begin{cases} x^2 + y^2 - 6y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

02. Representar a superfície cilíndrica $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

Resp.:

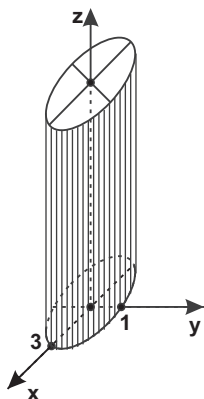


A superfície cilíndrica é circular e tem por diretriz uma circunferência no plano xy , $C = (2, 2)$, $R = 3$ e geratrizes paralelas ao eixo z .

$$d \begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$$

03. Representar a superfície cilíndrica $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$ e achar a equação da diretriz.

Resp.:

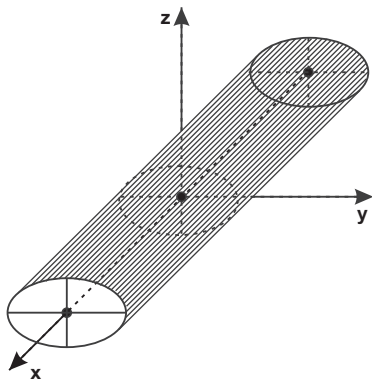


Superfície cilíndrica elíptica com geratrizes paralelas ao eixo z . A diretriz é uma elipse com centro em $O = (0, 0)$, $a = 3$ e $b = 1$.

Equação da diretriz:
$$d \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

04. Figurar a superfície cilíndrica $2y^2 + 3z^2 = 3$.

Resp.:

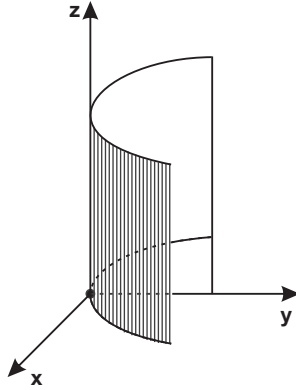


Trata-se de uma superfície cilíndrica elíptica em que o traço no plano yz é uma elipse com $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $b = 1$ e as geratrizes são paralelas ao eixo das abscissas.

Equação da diretriz:
$$d \begin{cases} 2y^2 + 3z^2 = 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

05. Esboce o gráfico da superfície quádrlica $y = 2x^2$.

Resp.:

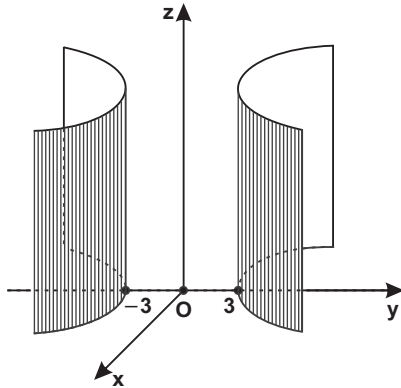


É uma superfície cilíndrica parabólica, cuja diretriz é a parábola $y = 2x^2$, pertencente ao plano xy e as geratrizes são paralelas ao eixo z .

Equação da diretriz:
$$d \begin{cases} y = 2x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

06. Figurar a superfície $y^2 - x^2 = 9$

Resp.:



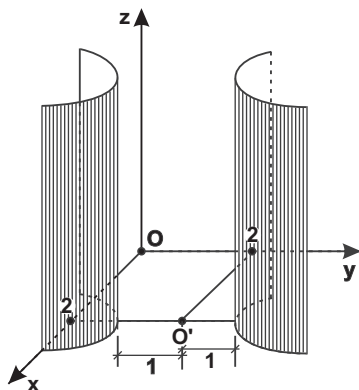
Superfície cilíndrica hiperbólica cuja diretriz é a hipérbole $y^2 - x^2 = 9$ no plano xy e as geratrizes são paralelas ao eixo coordenado z .

A hipérbole tem
 $O = (0, 0)$ e $a = b = 3$.

Equação da diretriz:
$$d \begin{cases} y^2 - x^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$$

07. Esboçar a superfície $(y - 2)^2 - (x - 2)^2 = 1$ e calcular a equação da diretriz.

Resp.:

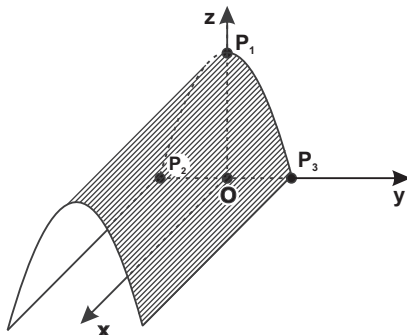


Superfície cilíndrica hiperbólica de geratrizes paralelas ao eixo z . A hipérbole pertence ao plano xy e tem $O' = (2, 2)$ e $a = b = 1$.

Equação da diretriz:
$$d \begin{cases} (y - 2)^2 - (x - 2)^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

08. Esboce o gráfico da superfície cilíndrica $y^2 = 5 - z$. Ache os pontos de interseção com os eixos cartesianos.

Resp.:



É uma superfície cilíndrica parabólica cuja diretriz é a parábola $y^2 = 5 - z$ (de concavidade voltada para baixo) pertencente ao plano yz e geratrizes paralelas ao eixo x .

Equação da diretriz:
$$d \begin{cases} y^2 = 5 - z \\ x = 0 \end{cases}$$

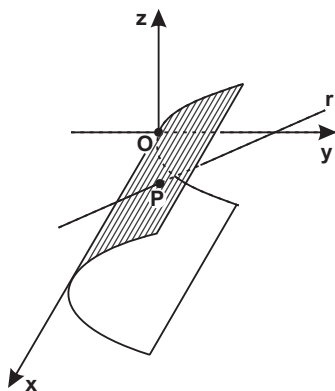
Pontos de interseção com os eixos:

$P_1 = (0, 0, 5)$; $P_2 = (0, -\sqrt{5}, 0)$ e $P_3 = (0, \sqrt{5}, 0)$

09. Achar as coordenadas do ponto P, interseção da superfície cilíndrica $y = z^2$ com a reta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{0}$.

Resp.: $P = (15, 16, 4)$

SUGESTÃO:



a) Equações paramétricas de r :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 4 \end{cases} \quad (1)$$

b) Substituir (1) na equação da superfície cilíndrica:
 $2 + t = (4)^2 \Rightarrow t = 14$ (2)

c) Levar (2) em (1).

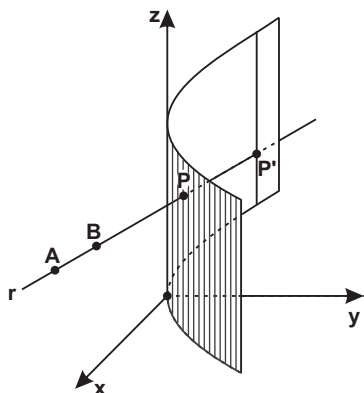
Obs.:

A reta r é paralela ao plano xy .

10. Achar as coordenadas dos pontos de interseção da superfície quádrlica $x^2 - y^2 + 2z^2 + 1 = 0$ com a reta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{1}$.

Resp.: $P = (-4, 5, 2)$ e $P' = (-25, 26, -5)$

11. Calcular os pontos de interseção da superfície cilíndrica parabólica de equação $x^2 = 4y$, presentemente representada com a reta que passa pelos pontos $A = (11, 4, 2)$ e $B = (5, 2, 2)$.



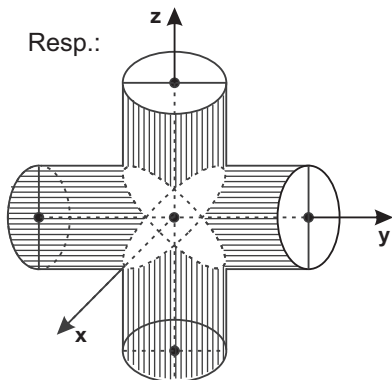
Resp.: $P = (2, 1, 2)$ e

$$P' = \left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{9}, 2 \right)$$

12. Representar num sistema cartesiano do E^3 as equações

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Resp.:



2 cilindros cujo raio é 2.

Obs.:

Os cilindros seccionam-se segundo duas elipses.

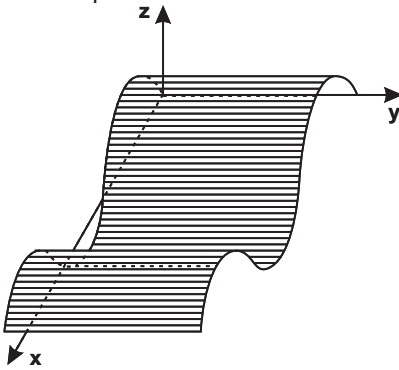
Série B

“Alguns homens parecem ter vindo ao mundo para fecundá-lo com suor e lágrimas. Surgem na face do planeta com a mais nobre e mais bela das intenções: a de torná-lo melhor. Semeiam o bem e plantam a bondade, pela palavra e pelo exemplo.”

João Manuel Simões (n.1938), advogado e escritor português radicado no Paraná.

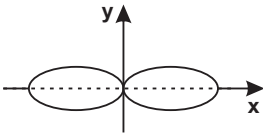
13. Representar a superfície $z = \sin x$.

Resp.:

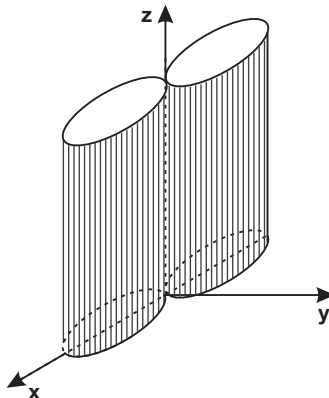


É uma superfície cilíndrica de geratrizes paralelas ao eixo y e cuja diretriz é um senóide no plano xz (lembra uma placa ondulada de fibro-cimento).

14. A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral ensina que a equação $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ - ao lado figurada - representa no E^2 uma curva denominada lemniscata (do grego - $\lambda\epsilon\mu\nu\sigma$ - que significa ornato, traço de fita). Representar esta mesma equação no E^3 .



Resp.:



Em suportes impressos ou digitais, o valor da boa leitura

Há uma sensação de enlevo e êxtase quando imergimos em uma boa leitura, quer pelo aconchego de um livro impresso, quer pela praticidade de um tablet ou outro dispositivo digital. Afinal – ao contrário de algumas previsões belicosas –, os e-books e as versões em papel não são rivais, e sim suportes diferentes que retratam uma harmoniosa convivência entre gerações analógicas, imigrantes digitais e nativos digitais.

Vivenciamos uma época singular da história com a superabundância de livros, revistas e jornais a preços acessíveis – muito diferente de uma realidade não tão distante –, e o acesso gratuito a praticamente todos os grandes clássicos da literatura universal por meio de downloads.

Há exatos 30 anos, o físico inglês Tim Berners-Lee criou a fantástica rede www, com a “ambição de que um dia ela abraçasse toda a Terra” – segundo suas palavras –, e sequer a patenteou para que fosse “livre e igualitária”. Só para dar uma ideia de seu gigantismo, nos dias de hoje a cada 5 minutos a internet hospeda novos dados que equivalem, em gigabytes, à totalidade do conteúdo da Biblioteca do Congresso norte-americano – a maior do mundo em acervo físico –, conquanto uma parcela significativa de bits da web seja fútil, quando não perniciososa.

Assim, a internet tornou-se a quase realização do grande sonho dos diretores da antiga Biblioteca de Alexandria, que no período do século III a.C. ao século IV d.C. continha praticamente todos os registros escritos da Antiguidade em cerca de 700 mil rolos de papiros. Seu lema era “adquirir um exemplar de cada manuscrito existente na face da Terra”.

A aquisição desses exemplares, no entanto, era uma odisseia. Cada pergaminho era obtido por diferentes meios – prioritariamente escambo ou pilhagem –, aproveitando-se do fato de que os navios que partiam de Alexandria singravam todos os mares conhecidos à época. No entanto, pela raridade, o manuseio era restrito aos mais conspícuos mestres da época. Atualmente, em contrapartida, vivemos a Era da Informação, com uma profusão mais ampla e democrática de conteúdo na web, apesar de ainda persistirem restrições de informações, especialmente estratégicas, científicas e tecnológicas.

Os suportes digitais para leitura são práticos, armazenam vários livros – uma facilidade para as viagens – e os preços para download são módicos. Porém, alguns estudos indicam que ler na tela pode eventualmente ser menos eficiente em comparação ao livro impresso para a compreensão e retenção de conteúdo, em especial os mais complexos e para gerações que não são nativas digitais.

Apesar dessa realidade global, o Brasil ainda é um país com baixo índice de leitores, ao menos em termos de conteúdos úteis, pois, considerando a leitura espontânea (ou seja, excluindo os indicados pelas escolas), não chega a dois por capita, enquanto na França é sete e nos EUA é cinco. Afinal, o brasileiro gasta, em média, 3h45 min por dia em redes sociais. Sim, ocupamos o segundo lugar (o primeiro são as Filipinas), num ranking de 45 países, conforme pesquisa publicada há um mês pela GlobalWebIndex, com sede em Londres. Isso significa menos leituras, menos estudo e menor convivência com familiares e amigos no mundo real

Um robusto estudo de 298 páginas denominado Retratos da Leitura no Brasil, do Instituto Pró-Livro, indica que quase 56% dos brasileiros se declaram leitores – o critério é ter lido um livro ou parte dele nos últimos três meses. Nos dois extremos, temos 30% que nunca compraram um livro e 25% com boas habilidades em leitura e escrita. Um recorte interessante desse estudo mostra que a maioria considera que a leitura ensina a viver melhor e que se converte em bons hábitos, inclusive citando uma pesquisa da Universidade de Roma que chegou à conclusão de que os leitores são mais felizes do que os não leitores.

E esse mesmo estudo também comprova o que todos sabemos: são os exemplos e não as palavras que influenciam a formação de novos leitores. Nesse sentido, prevalece a premissa de que a criança não nos ouve, mas nos imita, ou seja, pais e professores leitores formam crianças leitoras

Ademais, os bons leitores têm melhor compreensão de textos, loquacidade, pensamento crítico e escrita fluente na norma culta, requisitos tão valorizados nos concursos e na vida profissional. Quem bem lê, bem escreve. E sobre essa importância de uma boa escrita, os antigos já nos ensinavam em bom latim: verba volent, scripta manent (as palavras voam, os escritos ficam).

1. DEFINIÇÃO

Superfície cônica ou cone é a superfície gerada por uma reta móvel (denominada geratriz) passante por um ponto fixo (vértice) e que se apoia numa curva dada (diretriz).

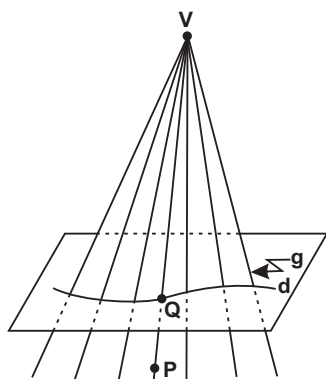
A diretriz d é representada por uma curva plana, fruto da interseção de duas superfícies:

$$d \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Sendo a diretriz uma circunferência, uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole, ter-se-á respectivamente uma superfície cônica circular, parabólica, elíptica ou hiperbólica. Quando a diretriz for uma reta, a superfície cônica se degenera num plano.

O vértice separa a superfície cônica em duas partes distintas, denominadas folhas e que são opostas pelo vértice. Em nome da simplificação, os cones são figurados costumeiramente apenas com uma folha, porém deve-se sempre admitir a existência de duas folhas.

2. EQUAÇÃO DA SUPERFÍCIE CÔNICA



Sejam:

$P = (X, Y, Z)$ um ponto genérico pertencente à geratriz;

$Q = (x, y, z)$ o ponto de interseção da geratriz que passa por P com a diretriz;

$V = (x_0, y_0, z_0)$ as coordenadas do vértice V .

Na figura os vetores $(Q - V)$ e $(P - V)$ são paralelos:

$$(Q - V) = (P - V)t$$

Isolando-se Q :

$$Q = V + (P - V)t$$

Substituindo-se as coordenadas tem-se as **equações paramétricas**:

$$x = x_0 + (X - x_0)t$$

$$y = y_0 + (Y - y_0)t$$

$$z = z_0 + (Z - z_0)t$$

Tais equações são levadas nas equações da diretriz:

$$d \begin{cases} f_1(x_0 + (X - x_0)t, y_0 + (Y - y_0)t, z_0 + (Z - z_0)t) = 0 \\ f_2(x_0 + (X - x_0)t, y_0 + (Y - y_0)t, z_0 + (Z - z_0)t) = 0 \end{cases}$$

Numa das equações acima isola-se o parâmetro t , o qual é substituído na outra equação obtendo-se a superfície cônica correspondente, que assume a forma $F(X, Y, Z) = 0$.

Exercício Resolvido

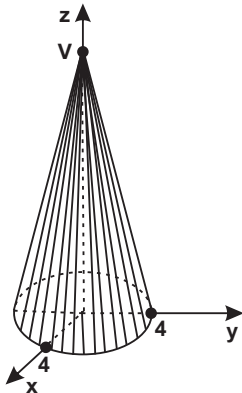
“O céu não conhece fúria igual ao amor transformado em ódio.”

William Congreve (1670-1729), dramaturgo inglês.

Calcular a equação da superfície cônica de $V = (0, 0, 5)$ e cuja diretriz é

$$d \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ z = 0 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO:



a) Equações paramétricas:

$$x = 0 + (X - 0)t = Xt$$

$$y = 0 + (Y - 0)t = Yt$$

$$z = 5 + (Z - 5)t$$

b) Substituindo as equações paramétricas nas equações da diretriz:

$$d \begin{cases} X^2t^2 + Y^2t^2 = 16 & \textcircled{1} \\ 5 + (Z - 5)t = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{5 - Z} & \textcircled{2} \end{cases}$$

c) Levando ② em ①:

$$X^2 \left(\frac{5}{5-Z} \right)^2 + Y^2 \left(\frac{5}{5-Z} \right)^2 = 16$$

desenvolvendo:

$$25X^2 + 25Y^2 - 16Z^2 + 160Z - 400 = 0$$

A equação acima representa um cone. Trata-se de uma superfície quádrica. Rememoremos, porém, que nem sempre superfícies cilíndricas e cônicas constituem quádricas.

Exercícios

"Os que nada fazem supõem-se capazes de tudo fazer."

Spencer Tracy (1900-1967), ator norte-americano.

01. Calcular a equação da superfície cônica de $V = (0, 0, -3)$ e cuja

diretriz é o círculo $d \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$$\text{Resp.: } 3X^2 + 3Y^2 - 2XZ - 6X = 0$$

02. Determinar a equação do cone de $V = (0, 1, 2)$ e diretriz o

círculo $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$

$$\text{Resp.: } X^2 + Y^2 - 2XY + 2Y + 2Z - 3 = 0$$

03. Pedir-se a equação da superfície cônica com vértice na origem

e cuja diretriz é a parábola $\begin{cases} y = 2x^2 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$

$$\text{Resp.: } 4X^2 - XY - YZ = 0$$

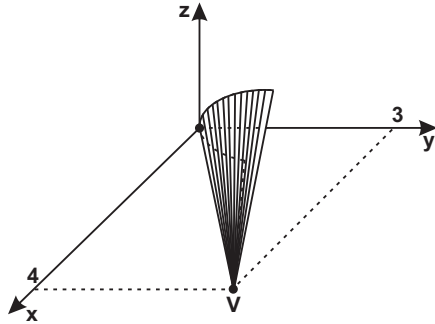
04. Achar a equação da superfície cônica cujo vértice é $V = (0, 0, 0)$

e diretriz a hipérbole $\begin{cases} xy = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

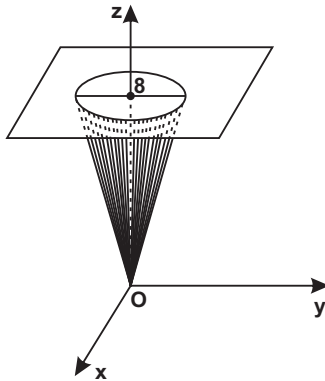
$$\text{Resp.: } 9XY = Z^2$$

05. Representar a superfície cônica de $V = (4, 3, 0)$ e d $\begin{cases} z^2 = 2y \\ x = 0 \end{cases}$

Resp.:



06. Calcular a equação do cone figurado, em que $V = O = (0, 0, 0)$ e o plano $z = 8$ corta o cone segundo uma elipse de equação $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{4} = 1$.

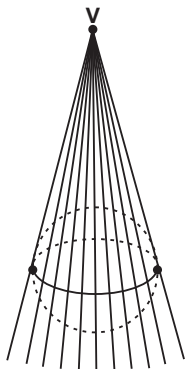


Resp.: $X^2 + 16Y^2 - Z^2 = 0$

07. Equação do cone de vértice na origem do sistema cartesiano e circunscrito à esfera $x^2 + y^2 + z^2 + x + y - z - 2 = 0$.

Resp.: $9X^2 + 9Y^2 + 9Z^2 + 2XY - 2YZ - 2XZ = 0$

SUGESTÃO:



a) Equações paramétricas:

$$x = 0 + (X - 0)t = Xt$$

$$y = 0 + (Y - 0)t = Yt$$

$$z = 0 + (Z - 0)t = Zt$$

b) Levando-se as equações paramétricas na equação da esfera e fatorando o parâmetro t :

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)t^2 + (X + Y - Z)t - 2 = 0$$

c) A superfície será tangente à esfera se o discriminante da equação do 2.º grau em t for nulo:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

$$(X + Y - Z)^2 - 4(-2)(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0$$

Desenvolvendo tem-se a resposta.

Série B

***“Uns nasceram para o martelo,
outros para a bigorna.”***

François N. Voltaire (1694-1778), escritor francês.

08. Equação da superfície cônica de $V = (1, 2, 0)$ e circunscrita à superfície $x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$

Resp.: $8X^2 + 2Y^2 - 9Z^2 - 8XY = 0$

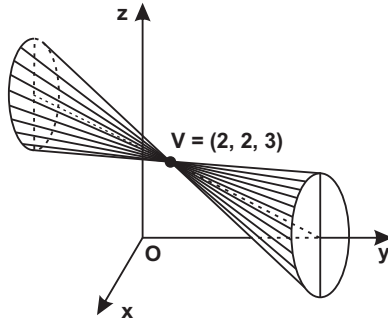
09. Calcular a equação do cone de $V = (0, 0, 1)$ e circunscrita a uma esfera tangente ao plano xy e cujo centro é $C = (2, -2, 3)$.

Resp.: $2X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 - 16XY + 16XZ - 16YZ - 16X + 16Y - 4Z + 2 = 0$

10. Achar a eq. da superfície cônica de $V = (1, 0, 0)$ e cuja diretriz é a interseção da superfície $x = y^2 + z^2$ com o plano $y + z - 2 = 0$.

Resp.: $3Y^2 + 3Z^2 - 2XY - 2XZ - 2YZ + 2Y + 2Z = 0$

11. Determinar a equação do cone representado ao lado, cuja diretriz d

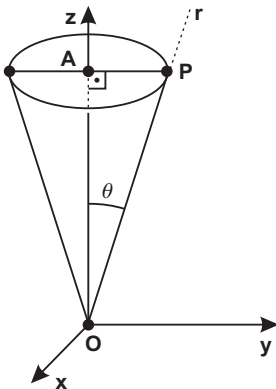
$$\begin{cases} 2x^2 + z^2 = 1 \\ y = 5 \end{cases}$$


Resp.: $18X^2 + 16Y^2 + 9Z^2 + 24XY + 18YZ - 120X - 166Y - 90Z + 421 = 0$

12. Achar a equação do cone de vértice na O, gerado por uma reta, que gira em torno do eixo z, formando com este um ângulo θ .

Resp.: $x^2 + y^2 - (\operatorname{tg}^2 \theta)z^2 = 0$

SUGESTÃO:



a) Seja $P = (x, y, z)$ um ponto genérico da superfície cônica e $A = (0, 0, z)$ a interseção do eixo z com um plano passante por P e ortogonal ao eixo z.

b) Do triângulo retângulo OAP:
 $AP = (\operatorname{tg} \theta)OA$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = (\operatorname{tg} \theta)\sqrt{0 + 0 + z^2}$$

quadrando tem-se a resposta.

Exemplo: Se $\theta = 45^\circ$ tem-se para eq. do cone: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, pois $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

13. Obter a equação do cone de vértice $V = (0, 1, 0)$ e diretriz

$$d \begin{cases} z^2 = x \\ y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

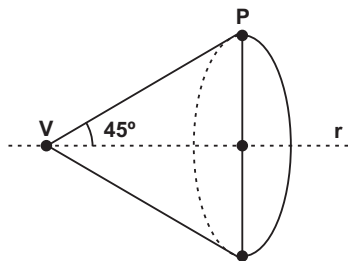
Resp.: $Z^4 - X^2Y^2 + 2X^2Y - 2XYZ^2 - X^2 + 2XZ^2 - X^2Z^2 = 0$

14. Calcular a equação do cone circular de $V = (2, 0, -1)$ sabendo que as geratrizes formam com o eixo que é a reta r um ângulo de 45° .

Dada $r: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z+3}{2}$

Resp.: $3x^2 + 5y^2 - 3z^2 - 20x + 10z - 8xz + 25 = 0$

SUGESTÃO:



a) vetor $\vec{r} = (1, 0, 2)$

b) Seja $P = (x, y, z)$ um ponto genérico do cone:

$(P - V) = (x - 2, y, z + 1)$

c) $\cos 45^\circ = \frac{\vec{r} \cdot (P - V)}{|\vec{r}| |(P - V)|}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(x - 2) + 2(z + 1)}{\sqrt{5} \sqrt{(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2}}$$

Quadrando e desenvolvendo obtém-se a resposta.

15. Achar a equação do cone circular cujo vértice é o ponto

$V = (1, 0, -1)$ e cujas geratrizes formam um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ com a reta

$r: \frac{x - 2}{0} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z + 3}{2}$.

Resp.: $15x^2 + 11y^2 - z^2 - 16yz - 30x - 16y - 2z + 14 = 0$

“Quem valoriza os privilégios acima dos princípios, acaba ficando também sem os privilégios.”

Dwight Eisenhower (1890-1969), estadista americano.

3. RECONHECIMENTO DE UMA SUPERFÍCIE CÔNICA E CÁLCULO DO VÉRTICE

a) Equações homogêneas

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral define de forma ampla uma equação homogênea. No presente momento, interessa um tipo particular deste tipo de equação:

Uma equação algébrica racional e inteira é homogênea quando todos os termos forem do mesmo grau.

Exemplos:

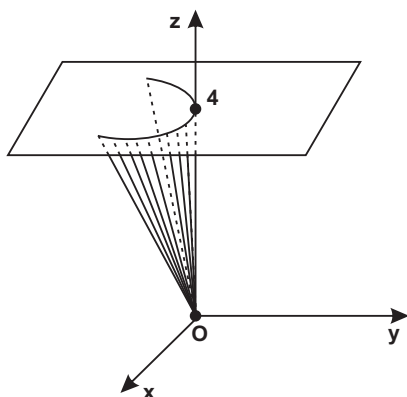
1. $3x^4 - z^4 - 2x^2y^2 + 2xz^3 = 0 \Rightarrow$ equação homogênea do 4.º grau.

2. $x^3 + y^3 + z^3 - 3x^2y + xz^2 + xyz = 0 \Rightarrow$ equação homogênea do 3.º grau.

b) Reconhecimento de uma superfície cônica e cálculo das coordenadas do vértice.

I. Uma equação $F(x, y, z) = 0$, racional, inteira e homogênea é uma superfície cônica com vértice na origem.

Exemplos:



1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 3xz + yz = 0 \Rightarrow$ equação de uma superfície cônica com $V = (0, 0, 0)$.

2) $x^3 + 2x^2y + 3xz^2 + 4xyz = 0 \Rightarrow$ equação de uma superfície cônica com $V = (0, 0, 0)$.

3) A equação $x^2 + 2yz = 0$ representa uma superfície cônica com $V = (0, 0, 0)$. Fazendo por exemplo $z = 4$ tem-se a diretriz $x^2 = -8y$ que representa uma parábola no plano $z = 4$.

Obs.:

Se faz oportuno exarar que uma equação homogênea pode representar apenas um ponto na origem. É o caso por ex. da equação $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 0$ só verificada pelo ponto $O = (0, 0, 0)$. A superfície cônica se degenera num ponto.

II. Não sendo homogênea a equação $F = (x, y, z) = 0$ efetua-se uma translação de eixos de tal sorte que a nova origem seja $V = (x_0, y_0, z_0)$. Deve-se verificar se é possível encontrar valores reais para x_0, y_0, z_0 que tornem homogênea a equação dada em relação às novas coordenadas.

Fórmulas de translação:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \\ z = z_0 + z' \end{cases}$$

Exercício Resolvido

“Segue sempre quem te dá pouco, e não quem muito te promete”.

Provérbio Chinês.

Verificar se a equação $5x^2 + y^2 - 11z^2 - 16yz - 10x - 22z - 16y - 6 = 0$ representa um cone, e sendo, achar as coordenadas do vértice.

RESOLUÇÃO:

a) Fórmulas de translação:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \\ z = z_0 + z' \end{cases}$$

b) Levando as fórmulas de translação na equação dada:

$$5(x_0 + x')^2 + (y_0 + y')^2 - 11(z_0 + z')^2 - 16(y_0 + y')(z_0 + z') - 10(x_0 + x') - 22(z_0 + z') - 16(y_0 + y') - 6 = 0 (*)$$

c) Fazendo os coeficientes de x', y' e z' igual a zero:

$$\begin{cases} * 10x_0 - 10 = 0 \Rightarrow x_0 = 1 \\ * 2y_0 - 16z_0 - 16 = 0 \\ * -22z_0 - 16y_0 - 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_0 = 0 \text{ e } z_0 = -1$$

d) Substituindo $x_0 = 1, y_0 = 0$ e $z_0 = -1$ em (*) obtém-se:

$$5x'^2 + y'^2 - 11z'^2 - 16y'z' = 0$$

que representa uma equação homogênea do 2.º grau.

e) Resposta:

A equação dada representa uma superfície cônica de vértice $V = (1, 0, -1)$. Dica: aplique a equação dada no Geogebra.

Obs.:

Em Cálculo Diferencial e Integral, as coordenadas do vértice de um cone dado por uma equação do 2.º grau com 3 variáveis podem ser obtidas mais facilmente derivando-se parcialmente cada variável.

Exercícios

NÃO ESTRAGUE O SEU DIA

*A sua irritação não solucionará problema algum.
As suas contrariedades não alteram a natureza das coisas.*

O seu mau humor não modifica a vida.

A sua dor não impedirá que o sol brilhe amanhã sobre os bons e os maus.

A sua tristeza não iluminará os caminhos.

O seu desânimo não edificará ninguém.

As suas lágrimas não substituem o suor que você deve verter em benefício da sua própria felicidade.

As suas reclamações, ainda que efetivas, jamais acrescentarão nos outros um só grama de simpatia por você.

Não estrague o seu dia. Aprenda com a Sabedoria Divina a desculpar infinitamente, construindo e reconstruindo sempre para o infinito Bem.

Psicografado pelo médium Francisco Cândido Xavier.

01. Dada a superfície quádrlica $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 4 = 0$, achar as coordenadas do vértice e provar que representa uma superfície cônica.

Resp.: $V = (1, 2, -1)$

02. A equação $x^2 + y^2 - 2yz + 2y + 2z + m = 0$ representa uma superfície cônica. Calcular as coordenadas do vértice e a constante **m**.

Resp.: $V = (0, 1, 2)$ e $m = -3$

03. Determine o valor de **k** para que a equação $3x^2 + 2y^2 - 2xz + 4yz + 4x + 8z + k = 0$ represente um cone e ache o vértice.

Resp.: $V = (0, -2, 2)$ e $k = -8$

04. Verificar se a equação $x^2 + y^2 - 8z^2 - 6x + 4y - 16z + 13 = 0$ representa uma superfície cônica.

Resp.: Não representa uma superfície cônica.

SUGESTÃO:

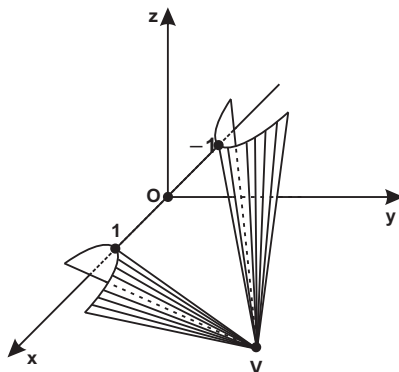
Substituindo as fórmulas de translação na equação dada obtém-se $x_0 = 3$, $y_0 = -2$ e $z_0 = -1$, que por sua vez não tornam homogênea a equação dada.

05. A equação $4x^2 - 4y^2 - 8z^2 + 4xz - 12yz - 1 = 0$ constitui um cone. Achar as coordenadas do vértice, a equação da diretriz no plano xy e fazer o desenho.

Resp.:

$V = (1, 3, -2)$

$$d \begin{cases} 4x^2 - 4y^2 = 1 \text{ (hipérbole)} \\ z = 0 \end{cases}$$



06. A equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 0$ representa um cone elíptico com

eixo coincidente como eixo z e vértice na origem. Achar a equação do traço no: a) plano $z = 5$; b) plano xz . Fazer a figura.

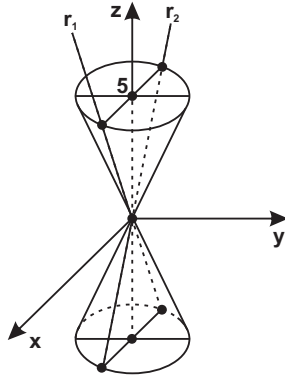
Resp.:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 & (\text{elipse com } a=3 \text{ e } b=2) \\ z = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{25} = 0 \Rightarrow 25x^2 - 4z^2 = 0 \Rightarrow (5x + 2z)(5x - 2z) = 0 \Rightarrow$$

retas $r_1: 5x - 2z = 0$ e $r_2: 5x + 2z = 0$ no plano xz .

c) Figura:



07. Identificar o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ que se movem no E^3 de tal sorte que a distância ao eixo x é igual ao triplo da distância ao eixo z .

Resp.: $9x^2 - y^2 + 8z^2 = 0$. Equação de um cone com $V = (0, 0, 0)$ e eixo coincidente com o eixo cartesiano y .

SUGESTÃO:

$$d(P, x) = 3d(P, z) \Rightarrow \sqrt{y^2 + z^2} = 3\sqrt{x^2 + z^2}$$

"You are not my first love, but you are my last."

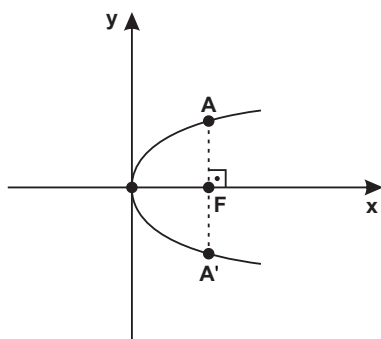
Canção Americana.

APÊNDICE: ETIMOLOGIA DE ALGUMAS PALAVRAS MATEMÁTICAS

As palavras **parábola**, **elipse** e **hipérbole** foram inicialmente empregadas pelos pitagóricos e por Arquimedes, mas com outra acepção. Utilizavam-nas na solução de equações 2.º grau por aplicação de áreas.

Tal como as concebemos hoje, como fruto de seções a um cone dado, são devidas a Apolônio.

PARÁBOLA (do grego *παραβολη*, **comparação, igualdade**)



Deve-se à igualdade, comparação existente na equação da parábola de vértice na origem:

$$y^2 = 2px$$

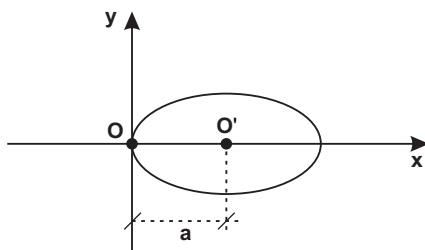
onde $2p$ é o comprimento (ℓ) do *lactus rectum* (corda AA'). Como $\ell = 2p$, a parábola pode ser escrita:

$$y^2 = \ell x$$

Obs.:

Como figura de linguagem em Português, entende-se parábola como uma narração que serve de **comparação** a outros no sentido moral. Por exemplo, as parábolas do Evangelho.

ELIPSE (do grego, *ελλειψις*, **falta, omissão**)



A elipse figurada tem um dos vértices na origem e o centro em $O' = (a, 0)$.

Equação cartesiana da elipse:

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Isolando o 2.º termo:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{(x-a)^2}{a^2}$$

Desenvolvendo e ordenando o 2.º membro:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a} - \frac{x^2}{a^2}$$

Isolando y^2 :

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2x^2}{a^2}$$

mas $\frac{2b^2}{a} = \ell$, onde ℓ é o comprimento do latus rectum, conforme se demonstrou na página 104, exercício 8.

$$y^2 = \ell x - \frac{b^2x^2}{a^2}$$

Ou seja: $y^2 < \ell x$

Na elipse, o quadrado y^2 é menor (**falta** para se chegar à igualdade) que o retângulo ℓx .

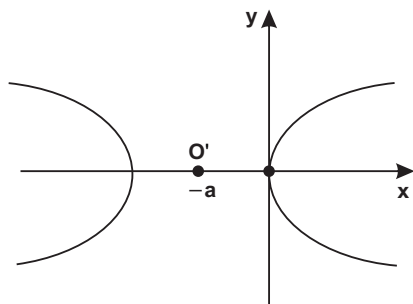
Obs.:

Como figura de linguagem em Português, significa omissão (falta) de uma ou mais palavras numa frase, sem lhe prejudicar a clareza. Exemplo:

“Os valorosos levam as feridas; e os venturosos, os prêmios.”

↓
(levam)

HIPÉRBOLE: (do grego, *υπερβολη*, **excesso, exagero**)



A hipérbole ao lado tem um dos vértices na origem e o centro em $O' = (-a, 0)$.

Equação cartesiana da hipérbole.

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Seguindo o desenvolvi-

mento adotado para a elipse, mutatis mutandis:

$$y^2 = \ell x + \frac{b^2 x^2}{a^2}$$

ou seja: $y^2 > \ell x$

Na hipérbole, o quadrado y^2 é maior (**excesso** em relação à igualdade) que o retângulo ℓx .

Obs.:

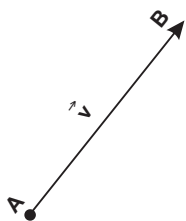
Como figura de linguagem em nosso vernáculo, significa exagero (excesso) de um pensamento. Exemplo:

“Quando ele morreu, as estrelas se transformaram em círios para lhes velarem o sono e os oceanos se tornaram mais salgados porque eram tudo lágrimas.”

É oportuno lembrar que a maioria esmagadora das palavras usadas em Matemáticas (do grego, *Mathematike*) etimologicamente (do grego, *etymologia*) provém do latim, do grego e do árabe. Amiúde, tais palavras têm acepção bastante primitiva ou até bizarra.

Como em outras ciências, a Matemática apresenta formulações inicialmente tênues e difusas, percorre um espinhoso trajeto até atingir a magnitude de seu desenvolvimento. Na sua etiologia, a Matemática deve mais à intuição e à imaginação que à razão e à lógica. Alguns exemplos:

VETOR



Vetor é o particípio passado do verbo latino **vehere**, e significa **levado, transportado**.

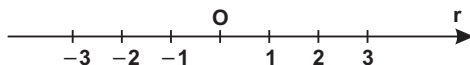
Assim, na figura ao lado, o ponto A é **levado**, é **transportado** até B através do vetor \vec{v} .

O conceito de vetor surgiu na mecânica com o engenheiro flamengo Simon Stevin – o “Arquimedes holandês”. Em 1586, apresentou, em sua *Estática e Hidrostática*, o problema da composição de forças e enunciou uma regra empírica para se achar a soma de duas forças aplicadas num mesmo ponto. Tal regra, a conhecemos hoje como regra do paralelogramo.

A sistematização da teoria vetorial ocorreu no século XIX com os trabalhos do irlandês William Hamilton (notavelmente precoce: aos 5 anos lia grego, latim e hebraico), do alemão Hermann Grassmann e do físico norte-americano Josiah Gibbs.

ABSCISSA

Abscissa em latim significa **corte, incisão** (Silveira Bueno). Deve-se provavelmente ao fato de que a representação da abscissa (ou abcissa) na reta se faz através de um pequeno **corte**.



ÁLGEBRA (do árabe *al-jabr*) que significa restauração, transposição)

Parece referir-se à transposição de termos de um membro para outro da equação.

A palavra álgebra foi amplamente divulgada na Europa, através da célebre obra *Al-jabr w'al muqabalah* (transposição e cancelamento), escrita em 825 d.C. por **Al-Khowarismi**. Tratava especialmente da repartição de heranças, com aplicações da **álgebra**.

Obs.:

Como **al-jabr** em árabe significa também restauração, popularizou-se na Era Medieval a profissão de **algebrista**. Qual a sua função? Restaurador ou consertador de ossos quebrados ou destroncados. Com esta conotação, o **algebrista** se faz presente em **Dom Quixote**.

ALGARISMO

Esta palavra oriunda-se provavelmente do nome de um dos maiores algebristas árabes: **Al-Khowarismi**. Além da obra anteriormente mencionada, escreveu o livro que recebeu o título latino: *De numero hindorum* (sobre os números dos hindus).

Esta obra apresenta a morfologia de números muito próxima dos símbolos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Tais símbolos haviam sido criados pelos hindus, mas dado ao grande sucesso da obra em toda a Espanha, ficaram conhecidos como **algarismos arábicos**.

O monge e matemático francês Gerbert d'Aurillac tomou conhecimento dos algarismos indo-arábicos em Barcelona no ano de 980. No ano de 999, Gerbert foi eleito Papa (com nome de Silvestre II) e promoveu a divulgação de tais algarismos.

O zero aparece pela 1.^a vez num manuscrito muçulmano do ano de 873. Pecando por entusiasmo e exagero, um matemático afirmou: "o zero é a maior invenção da Matemática".

Conta Hygino H. Domingues que os números negativos surgiram na Índia, no século VII, para indicar débitos. Os gregos não os conheciam e tampouco foi fácil a sua assimilação na Europa. M. Stifel (1486-1567) os

denominava de **números absurdos**; G. Cardano (1501-1576), de **números fictícios**, R. Descartes (1596-1650) chamava de **falsas** as raízes negativas de uma equação; B. Pascal (1623-1662) considerava a subtração “0-4” algo **sem sentido**.

Os **algarismos romanos** por sua vez tiveram influência dos etruscos. Pelos manuscritos da época, conclui-se que os algarismos romanos se consolidaram pelo ano 30 d.C.

O símbolo I (que representa o n.º 1) é uma das formas mais primitivas de se representar algo e tem origem incerta. Já o X (que representa o n.º 10) decorre da palavra latina **decussatio**, que significa **cruzamento em forma de X**. O V que representa o 5, os romanos tomaram a metade superior do algarismo X. O n.º 100, identificado pela letra C em algarismo romano, provém da inicial latina **centum** (cem). O algarismo romano M decorre da palavra latina **mille** (que significa 1.000).

GEOMETRIA (do grego **Geo**, terra e **metron**, medida)

“Os historiadores gregos, sem exceção, procuram colocar no Egito o berço da Geometria, atribuindo-a portanto, aos habitantes do vale do Nilo a invenção dessa ciência. As periódicas inundações desse célebre rio forçaram os egípcios ao estudo da Geometria, pois uma vez passado o período da grande cheia, quando as águas retornavam ao seu curso normal, era necessário repartir novamente as terras, perfeitamente delimitadas. A pequena faixa de terra, rica e fértil, era disputada por muitos interessados; faziam-se medições rigorosas a fim de que cada um, sem prejuízo dos outros, fosse reintegrado da posse exata de seus domínios (Thiré e Melo Souza).

O início da axiomatização da Geometria deve-se a Euclides (séc. III a.C.), que foi sinônimo de Geometria até o século XIX, quando foi parcialmente contestado o seu 5.º postulado por Riemann, Lobatchewski e Bolyai (são os criadores das geometrias não-euclidianas) que tem grande importância na Física e na Astronomia. Rememoremos o 5.º postulado (ou postulado das paralelas) de Euclides, cujo enunciado equivale ao seguinte: “por um ponto podemos traçar uma única paralela a uma reta dada”.

Numa de suas aulas no museu de Alexandria (que junto com a Biblioteca constituíam o que entendemos hoje por Universidade), Euclides demonstrava um dos teoremas e foi arguido por um discípulo:

– Mestre, qual a utilidade desta demonstração?

Imperturbável, Euclides chamou seu escravo e lhe disse:

– Dê uma moeda a esse jovem para que ele possa ter proveito com tudo que está aprendendo.

Platão (427-347 a.C.) – conspícuo filósofo grego – indagado certa vez sobre a atividade divina, respondeu: “Deus eternamente **geometriza**”.

O maior templo da Geometria foi a Biblioteca de Alexandria, no Egito, fundada em 290 a.C. por Ptolomeu.

Todos os grandes geômetras da antiguidade como Euclides,

Arquimedes, Eratóstones, Apolônio, Pappus, Diofanto, Cláudio Ptolomeu, Teon de Alexandria, Hipátia, etc., se debruçaram sobre os vetustos e noveis pergaminhos e papiros da Biblioteca. Esta, desgraçadamente, foi vítima da ganância inescrupulosa do povo romano e, mais tarde, do fanatismo religioso dos muçulmanos e cristãos.

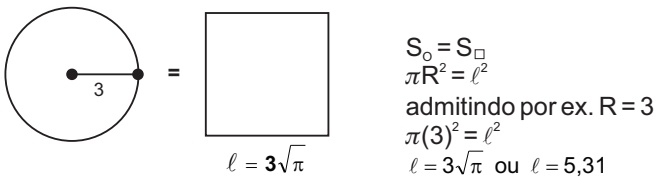
Ao longo de sua história, a Geometria glorifica dois problemas que se tornaram clássicos:

1.º) O PROBLEMA DA QUADRATURA DO CÍRCULO

Foi proposto inicialmente por Anaxágoras (499-428 a.C.). Aprisionado em Atenas por suas idéias muito avançadas para a época, afirmou que o Sol não era uma divindade, mas uma grande pedra incandescente, maior que o Peloponeso (península do sul da Grécia) e que a Lua não tinha luz própria e a recebia do Sol. Anaxágoras foi professor de Péricles (490-429 a.C.), que o libertou da prisão. Ademais, exerceu forte influência no primeiro dos três grandes filósofos: Sócrates, Platão, Aristóteles.

Problema da Quadratura do círculo: dado um círculo, construir um quadrado de mesma área. Como os gregos desconheciam as operações algébricas e priorizavam a Geometria, propunham solução apenas com régua (sem escala) e compasso. No séc. XIX, demonstrou-se que nestas condições este problema é irresolúvel.

A solução é trivial se lançarmos mão dos recursos da álgebra:



$$S_o = S_q$$

$$\pi R^2 = \ell^2$$

admitindo por ex. $R = 3$

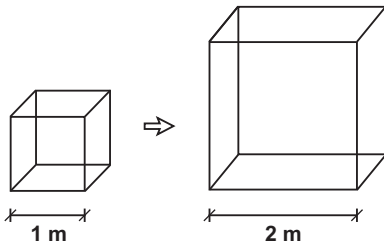
$$\pi(3)^2 = \ell^2$$

$$\ell = 3\sqrt{\pi} \text{ ou } \ell = 5,31$$

2.º) PROBLEMA DA DUPLICAÇÃO DO CUBO ou PROBLEMA DELIANO

Durante o cerco espartano da Guerra do Peloponeso, conta uma lenda que em 429 a.C. uma peste dizimou 25% da população de Atenas,

matando inclusive Péricles. Diz-se que uma plêiade de sábios fora enviada ao oráculo de Apolo, em Delos (donde o nome deliano) para inquirir como a peste poderia ser eliminada.



O oráculo respondeu que **o altar cúbico de Apolo deveria ser duplicado**. Os atenienses celere-

mente dobraram as medidas das arestas do cubo.

A peste, em vez de se amainar, recrudescera. Qual o erro?
Em vez de dobrar, os atenienses octuplicaram o volume do altar.

Pois:

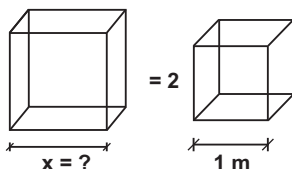
$$\text{para } a = 1 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = 1^3 = 1$$

$$\text{para } a = 2 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = 2^3 = 8$$

A complexidade do problema deve-se ao fato de que os gregos procuravam uma solução geométrica. E mais um complicador: com régua (sem escala) e compasso.

Ainda no século IV a.C., o geômetra grego Menaecmus (que juntamente com Platão foi professor de Alexandre, o Grande) resolveu o problema com o traçado de uma parábola e de uma hipérbole. Hodiernamente, tal solução é facilmente compreensível através da Geometria Analítica: Menaecmus obteve geometricamente o ponto de interseção da parábola $x^2 = 2y$ com a hipérbole $xy = 1$. A solução é $x = \sqrt[3]{2}$. Foi relativo o sucesso de Menaecmus entre os seus compatriotas: não se valeu de régua (sem escala) e compasso apenas!

A solução deste problema é trivial com os recursos da álgebra: procura-se a aresta (x) de um cubo, cujo volume seja o dobro do volume de um cubo de $a = 1$ ($V_{\text{cubo}} = a^3$):



$$x^3 = 2(1)^3$$

$$x = \sqrt[3]{2} \cong 1,26$$

Obs.:

Em 1837, o francês Pierre L. Wantzel demonstrou que o problema deliano não admite solução com uso de régua e compasso apenas. Com somente 23 anos Wantzel, engenheiro da prestigiosa Ecole Polytechnique, pôs fim a discussões de quase dois milênios.

Em seu excelente livro *O Romance das Equações Algébricas* (ed. Makron Books), Gilberto G. Garbi descreve que "esta limitação de apenas dois instrumentos espelhava o conceito de elegância com que os gregos tratavam das questões geométricas e, também, a atração tipicamente helênica que eles nutriam pelos desafios intelectuais, independente de qualquer utilidade prática."

TRIGONOMETRIA (do grego, **trigonos**, triângulo e **metron**, medida)

A Trigonometria derivou-se da Astronomia, uma vez que esta se preocupava em determinar as posições relativas dos corpos celestes.

Eratóstones (276-194 a.C.), que foi diretor da Biblioteca de Alexandria, comprovou, pela trigonometria, a esfericidade da Terra e mediu com engenhosidade e relativa precisão o perímetro de sua circunferência.

Num dos rolos de papiro, encontrou a informação de que na cidade de Syene (hoje Assuã, no sul do Egito), ao meio-dia do solstício de verão (o dia mais longo do ano, 21 de junho, no hemisfério norte) colunas verticais não projetavam qualquer sombra; ou seja, o Sol se situava a prumo. Entretanto, o nosso conspícuo geômetra observou que no mesmo horário e dia, as colunas verticais da cidade de Alexandria projetavam uma sombra perfeitamente mensurável.

Aguardou o dia 21 de junho do ano seguinte e determinou que se instalasse uma grande estaca em Alexandria e que se escavasse um poço profundo em Syene.

Ao meio-dia, enquanto o Sol iluminava as profundezas do poço em Syene (fazia ângulo de 90° com a superfície da Terra), em Alexandria Eratóstones mediu o ângulo $\theta = 7^\circ 12'$, ou seja: $1/50$ dos 360° de uma circunferência. Portanto, o comprimento do meridiano terrestre deveria ser 50 vezes a distância entre Alexandria e Syene.



Por tais cálculos, conjecturou que o perímetro da Terra seria de 46.250 km. Hoje sabemos que é de 40.076 km.

Precedeu a experiência um feito digno de nota: Alexandria e Syene situavam-se a grande, porém, desconhecida distância. Para medi-la, Eratóstones determinou que uma equipe de instrutores com seus camelos e escravos a pé, seguissem em linha reta, percorrendo desertos, aclives, declives e tendo que, inclusive atravessar o rio Nilo. Distância mensurada:

5.000 estádios ou cerca de 925 km em linha reta. Hoje se sabe que são de 1990 km.

Eratóstones foi um profissional brilhante e eclético: além de Matemática e diretor do mais notável Templo do Saber de todos os tempos, foi poeta, escritor, geógrafo e atleta. No entanto, teve um final de existência profundamente lamentável: suicidou-se após ter sido acometido por uma doença que o cegou.

MINUTOS E SEGUNDOS

Ao se representar $\theta = 32^{\circ}52'25''$, dizemos que o ângulo θ tem 32 graus, 52 minutos e 25 segundos. Não há explicação razoável para a palavra grau. Há, porém, para minutos e segundos, de acordo com Carl B. Boyer.

No exemplo acima, o 52 era acompanhado da expressão latina partes **minuta** prima (primeira menor parte), e o 25 era acompanhado de outra expressão latina: partes minuta **segunda** (segunda menor parte).

LOGARITMO (do grego, **logos**, estudo, razão, proporção e **arithmos**, números)

A palavra logaritmo apareceu pela primeira vez na obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Uma Descrição da Maravilhosa Regra dos Logaritmos), escrita por John Neper ou John Napier (1550-1617).

Neper não era nenhuma estrela de alguma constelação universitária. Proprietário rural na Escócia, barão e um homem polêmico (afirmava que o Papa era o anti-Cristo).

A sua obra supracitada foi publicada após 20 anos de minucioso e criterioso trabalho. Tinha por escopo servir à Navegação e à Astronomia. O matemático e astrônomo francês Pierre de Laplace (1749-1827) assim se reportava aos logarithmos: “ao encurtarem o trabalho, dobraram a vida dos astrônomos”. Se hoje os logaritmos possuem uma importância bem menor, deve-se à eclosão das calculadoras e dos computadores. Estes, porém, seriam máquinas muito limitadas se não houvesse logaritmos, uma vez que muitas operações são efetuadas com a tábua de logaritmos, que integra os softwares.

Em 1615, Henry Briggs, professor de Geometria de Oxford, empreendeu uma longa viagem à Escócia e visitou John Neper em sua casa. Conta o historiador F. Cajori que o encontro foi emocionante: levaram 15 minutos se abraçando, sem dizer uma palavra.

Briggs propôs o uso da base 10, dada uma maior facilidade nos cálculos. Em 1617, Briggs publicou o seu *Logarithmorum Chilias Prima*, que constitui a primeira tábua de logaritmos decimais, no caso de 1 a 1.000

e com 14 casas decimais.

Sete anos mais tarde, Briggs, em *Arithmetica Logarithmica*, efetua os cálculos dos logaritmos decimais de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000. Nesse livro pela primeira vez, apareceram as palavras mantissa e característica.

As tábuas logarítmicas lograram grande êxito, pois ensejavam enorme facilidade nos cálculos aritméticos.

Desconhecida de Neper, a chamada base dos logaritmos neperianos foi representada pela letra **e** por Euler (1707-1783) e supõe-se ser a letra inicial da palavra exponencial (por causa do limite exponencial cujo resultado é o próprio **e**) ou mesmo como uma auto-referência ao seu nome: Euler.

$$\text{A base } e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = 2,7182 \dots$$

SÍMBOLOS E NOTAÇÕES MATEMÁTICAS

Apropriadamente, já se definiu a Matemática como a “rainha e a serva de todas as ciências”. E o apanágio de sua majestade é o rigor, a lógica, a harmonia e sua linguagem precisa, universal e sincopada.

Sabemos que os gregos antigos promoveram um grande desenvolvimento à Geometria Plana e Espacial, mas não dispunham de uma notação algébrica ou simbologia adequadas.

Até o século XVI, toda a expressão matemática se fazia de uma forma excessivamente “verbal ou retórica”.

Por exemplo, em 1591, Viète para representar a equação quadrática $5A^2 + 9A - 5 = 0$, escrevia em bom latim:

5 in A quad. et 9 in A planu minus 5 aequatur 0. (5 em A quadrado e 9 em A plano menos 5 é igual a zero).

Além da proximidade de comunicação entre os matemáticos, havia outras dificuldades, pois se utilizava de notações diferentes para indicar as mesmas coisas.

O maior responsável por uma notação matemática mais consistente e utilizada até hoje foi Leonhard Euler (1707-1783).

Recordemos as principais: $f(x)$ (para indicar função de x); Σ (somatória e provém da letra grega sigma, que corresponde ao nosso S); i (unidade de imaginária igual a $\sqrt{-1}$); e (base do logaritmo neperiano e igual a 2,7182...); ℓx (para indicar o logaritmo de x); as letras minúsculas a, b, c para indicarem os lados de um triângulo e as letras maiúsculas A, B, C para os ângulos opostos. A letra $\pi = 3,1415\dots$ que havia sido utilizada por William Jones em 1706, teve o uso consagrado por Euler.

Euler nasceu em Basiléia, Suíça, e recebeu educação bastante eclética: Matemática, Medicina, Teologia, Física, Astronomia e Línguas Ocidentais e Orientais.

Extremamente profícuo, insuperável em produção matemática, Euler escrevia uma média de 800 páginas por ano e publicou mais de 500 livros e artigos. Em plena atividades intelectual, morreu aos 76 anos, sendo que os últimos 17 anos passou em total cegueira (consequência de catarata). Mesmo assim continuou ditando aos seus filhos (eram 13).

Euler se ocupou com praticamente todos os ramos então conhecidos da Matemática a ponto de merecer do francês François Arago o seguinte comentário: “Euler calculava sem qualquer esforço aparente como os homens respiram e as águias se sustentam no ar.”

Em 1748, publica sua principal obra com o título latino: *Introductio in Analysis infinitorum* (Introdução à Análise Infinita), considerada um dos marcos mais importantes da Análise como disciplina sistematizada. Destarte, Euler recebeu a alcunha de “Análise Encarnada”.

A solução dos símbolos mais adequados foi acontecendo naturalmente ao longo de décadas ou séculos, sob a égide da praticidade e do pragmatismo. É evidente, porém, que pouco se pode afirmar com precisão nesta evolução. Alguns exemplos:

SÍMBOLO DE +: O primeiro a empregar o símbolo de + para a adição em expressões aritméticas e algébricas foi o holandês V. Hoecke em 1514. Há historiadores, porém, que creditam tal mérito a Stifel (1486-1567).

Uma explicação razoável é que até então, a adição de dois números, por exemplo $3 + 2$ era representada por $3 \text{ et } 2$. Com o passar dos anos, a conjunção latina **et** (que significa e) foi sincopada para “t”, donde se originou o sinal de +.

SÍMBOLO DE –: Pode ter sido fruto da evolução abaixo exposta, conforme se observa nos escritos dos matemáticos italianos da Renascença:

1.º) 5 minus 2 = 3 (minus em latim significa menos)

2.º) $5\bar{m} 2 = 3$ (\bar{m} é abreviatura de minus)

3.º) $5 - 2 = 3$ (sincopou-se o m da notação \bar{m})

SÍMBOLO DA MULTIPLICAÇÃO: Relata Gabriel M. de Souza Leão que o símbolo de **x** em $a \times b$ para indicar a multiplicação foi proposto pelo inglês William Oughthed (1574-1660). É provável que seja originário de uma alteração do símbolo de +. O ponto em $a \cdot b$ foi introduzido por Leibniz (1646-1716).

SÍMBOLOS DA DIVISÃO: Fibonacci (séc. XII) emprega a notação

$\frac{a}{b}$ ou a/b , já conhecidas dos árabes. A notação $a : b$ é devida a Leibniz em 1648. Já o inglês J. H. Rahn (1622-1676) emprega a notação $a \div b$.

SÍMBOLOS DE > OU <: O inglês Thomas Harriot (1560-1621) foi o introdutor dos símbolos de $>$ ou $<$ para indicar maior ou menor, respectivamente. No entanto, os símbolos \geq ou \leq surgiram mais tarde, em 1734, com o francês Pierre Bouguer.

SÍMBOLO π : É a inicial da palavra grega *περιφέρεια*, que significa circunferência. Sabemos que $\pi = 3,1415926535\dots$ é um número irracional e é a razão entre o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro.

O aparecimento do símbolo π só aconteceu em 1706, e deve-se a William Jones, um amigo de Newton. No entanto, a consagração do uso do π deve-se ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).

Em 1873, como muito se discutia sobre a irracionalidade do π , o inglês W. Shanks calculou o π com 707 casas decimais. Os cálculos eram laboriosos e feitos manualmente, e Shanks levou cerca de 5 anos para efetuá-los.

Em 1988, japonês Yasumasa Kanada conseguiu calcular o π com 200 milhões de casas decimais. O supercomputador usado por Y. Kanada levou apenas 6 horas para fazer os cálculos.

Não há evidentemente nenhum interesse prático em conhecer o π com tantas casas decimais. Serve como marketing entre os fabricantes de computadores.

Usando o π com 40 casas decimais, assegura Hygino H. Domingues, “o cálculo da medida da circunferência envolvendo todo o Universo conhecido dará o valor com a precisão da ordem do diâmetro de um próton. E este é menor que qualquer coisa que a vista humana possa enxergar.

Na antiguidade, Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) foi o primeiro a utilizar um método não empírico e sim científico para o cálculo do π . Em seu tratado *Sobre as Medidas do Círculo*, Arquimedes em um círculo dado inscreveu e circunscreveu um polígono de 96 lados e obteve:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

ou

$$3,1408 < \pi < 3,1428$$

SÍMBOLOS DE $\sqrt{\quad}$ (RAIZ): Apareceu pela primeira vez na obra *Die Coss* (1525), do matemático alemão C. Rudolff. Este sugeria o

símbolo por sua semelhança com a primeira letra da palavra latina **radix** (raiz).

SÍMBOLO DE = (IGUALDADE): Tudo indica que o sinal de igualdade (=) foi introduzido por Robert Recorde (~1557), pois nada é *moare equalle a paire de paralleles* (nada é mais igual que um par de retas paralelas).

- 1) BARSOTTI, Leo. *Geometria Analítica e vetores*. Curitiba, Artes Gráficas e Editora Unificado, 1984. 3.^a ed. v.2. 220 p.
- 2) BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*. São Paulo, Mc Graw-Hill, 1987. 2.^a ed. 383 p.
- 3) STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica*. São Paulo, Mc Graw-Hill, 1987. 2.^a ed. 291 p.
- 4) CAROLI, Alésio João de; CALLIOLI, Carlos Alberto, FEITOSA, Miguel Oliva. *Vetores, Geometria Analítica: teoria e exercícios*. São Paulo, Nobel, 1968. 6.^a ed. 212 p.
- 5) MURDOCH, David C. *Geometria Analítica: com uma introdução ao cálculo vetorial e matrizes*. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1971. 2.^a ed. 296 p.
- 6) REIS, Genésio Lima dos; SILVA, Valdir Vilmar da. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1984. 1.^a ed. 227 p.
- 7) RIGHETTO, Armando. *Vetores e Geometria Analítica*. São Paulo, IBEC, 1982. 5.^a ed. 384 p.
- 8) WEXLER, Charles. *Analytic Geometry*. Tokio, Adison-Wesley Publishing Company inc. 1964. 1.^a ed. 291 p.
- 9) GIACAGLIA, G. E. O. *Vetores e Geometria Analítica - Elementos de Álgebra Linear*. São Paulo, Nobel, 1985. 3.^a ed. 355 p.
- 10) SMITH, Percy; GALE, Arthur; NEELLEY, John. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1971. 1.^a ed. 1957.
- 11) LEHMANN, Charles H. *Geometria Analítica*. México, UTEHA, 1953. 1.^a ed. 488 p.
- 12) MIDDLEMIS, Ross R. *Analytic Geometry*. Tokio, Mc Graw-Hill Book Company Inc, 1955. 2.^a ed. 310 p.
- 13) ZÓZIMO, Gonçalves Menna. *Geometria Analítica Plana: tratamento vetorial*. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1978. 1.^a ed. 248 p.
- 14) CABRERA y MEDICI. *Geometria Analítica*. Buenos Aires, 1947. 1.^a ed. 456 p.
- 15) BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 1974. 1.^a ed. 488 p.
- 16) SIMMONS, George F. *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo, Mc Graw-Hill, 1987, 1.^a ed. v. 1. 829 p.
- 17) VENTURI, Jacir J. *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica*. Curitiba, Livrarias Curitiba, 2015, 10.^a ed. v.1. 241p.

Além da versão impressa, o presente livro de Cônicas e Quádricas, juntamente com duas outras obras do autor – Álgebra Vetorial e Geometria Analítica; Da Sabedoria Clássica à Popular – estão disponíveis gratuitamente em www.geometriaanalitica.com.br, que tornou-se uma das principais referências sobre o tema no Google.

Esse destaque contribui que usuários de 7 dezenas de países tenham acessado o conteúdo dos três livros citados, contabilizado pelo Google Analytics mais de 1,2 milhão de acessos, aí incluídos os downloads especialmente em computadores de universidades.

